۱۱ کد درس در یک فایل | جدول کد درس ← ویراست منبع | ۳۳ خودآزمایی با حل کامل

همه مثال‌ها با برنامه حل‌شده | ۱۴ خطای کتاب علامت‌خورده | انتگرال، ماتریس، مشتق جزئی

منبع رسمی پیام‌نور

# ریاضیات پایه و مقدمات آمار ۲

## خلاصه طبقه‌بندی‌شده پنج فصل – انتگرال، ماتریس، دستگاه معادلات، مقادیر ویژه و مشتق جزئی

منبع: کتاب ریاضیات پایه و مقدمات آمار ۲ – موسی‌الرضا شمسیه زاهدی (انتشارات دانشگاه پیام نور)

**کد درس:**
1111015، 1241187، 1111496، 1111010، 1214152، 1221127، 1214223، 1222196، 1111006، 1111549، 1111776

آخرین به‌روزرسانی: آبان ۱۴۰۵

نویسنده جزوه //
تیم تألیف بژیک

کیفیت //
هر مثال عددی با برنامه دوباره حل شده

مناسب برای درس‌های //
ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت ۲، ریاضی کاربردی ۲، ریاضیات برای اقتصاد

ساختار //
۲۲ کادر «دقت کنید» و ۴۸ قاعده طلایی

۴۷
صفحه مفید

۱۱
کد درس

۳۳
تمرین با حل

© Copyrights - bzhik.ir

## خلاصه کتاب ریاضیات پایه و مقدمات آمار ۲، موسی‌الرضا شمسیه زاهدی

**منبع رسمی دانشگاه پیام نور برای یازده کد درس · پنج فصل: انتگرال، ماتریس، دستگاه معادلات، تبدیلات خطی، توابع چند متغیره**

**منبع**
ریاضیات پایه و مقدمات آمار ۲، موسی‌الرضا شمسیه زاهدی، انتشارات دانشگاه پیام نور (ویراست پیشین کتاب)

**پوشش**
هر پنج فصل کتاب، با تعریف‌ها، قضیه‌ها، روش‌های حل و مثال‌های حل‌شده؛ آخر هر فصل خودآزمایی منتخب کتاب با حل کامل

**ویژگی**
همهٔ مثال‌های عددی (انتگرال، دترمینان، وارون، دستگاه، مقدار ویژه، مشتق جزئی و اکسترمم) با برنامه دوباره حل شده‌اند؛ هر جا کتاب خطای چاپی یا محاسباتی داشته، در کادر «دقت کنید» علامت خورده و جواب درست کنارش آمده است

### کد درس خود را پیدا کنید و ویراست منبع خودتان را ببینید

| کد درس | نام درس در گلستان | منبع ثبت‌شده و فصل‌های مطالعه |
|---|---|---|
| 1214223 | ریاضیات کاربردی در حسابداری ۲ | همین کتاب (ثبت ۱۳۹۳)؛ هر پنج فصل |
| 1222196 | ریاضیات در برنامه‌ریزی | همین کتاب (ثبت ۱۳۹۳)؛ هر پنج فصل |
| 1111006 | ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت ۲ | همین کتاب (ثبت ۱۳۹۳) به همراه منبع «مقادیر ویژه ـ بردارهای ویژه» گروه ریاضی |
| 1111549 | ریاضی عمومی ۱ | همین کتاب (ثبت ۱۳۹۳) به همراه کتاب ریاضی عمومی ۱ چشم‌آور؛ حذفیات اعلام‌شده: فصل‌های ۲، ۳ و ۴ مطالعه شود |
| 1111776 | ریاضیات زیست‌فناوری ۱ | همین کتاب (ثبت ۱۳۹۳) به همراه کتاب ریاضی عمومی ۱ چشم‌آور؛ حذفیات اعلام‌شده: فصل‌های ۲، ۳ و ۴ مطالعه شود |
| 1111015 | ریاضیات پایه و مقدمات آمار ۲ | ویراست دوم (ثبت ۱۴۰۲) |
| 1241187 | ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت ۲ | ویراست دوم (ثبت ۱۴۰۲) |
| 1111496 | ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت | ویراست دوم (ثبت ۱۴۰۲) |
| 1111010 | ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت | ویراست دوم (ثبت ۱۴۰۲) |
| 1214152 | ریاضی کاربردی ۲ | ویراست دوم (ثبت ۱۴۰۲) |
| 1221127 | ریاضیات برای اقتصاد | ویراست دوم (ثبت ۱۴۰۲) |

⚠️ این خلاصه از ویراست پیشین کتاب ساخته شده است. شش کدی که گلستان برایشان «ویراست دوم» را ثبت کرده، ممکن است در ترتیب یا محتوای بعضی بخش‌ها با این فایل تفاوت داشته باشند؛ تطبیق با ویراست دوم هنوز انجام نشده و پس از انجام، نسخهٔ به‌روز رایگان برای خریداران فرستاده می‌شود. درس «ریاضیات پایه» (کتاب لیدا فرخو، کدهایی مانند 1111014 و 1111012) و درس 1218714 (کتاب پورکاظمی) منبع دیگری دارند و در این فایل نیستند. پیش از مطالعه، کد درس را در انتخاب واحد گلستان با جدول بالا تطبیق دهید.

## فهرست فصل‌ها


- فصل اول: انتگرال
- فصل دوم: بردار و ماتریس
- فصل سوم: دستگاه معادلات خطی
- فصل چهارم: تبدیلات خطی و مقادیر ویژه
- فصل پنجم: توابع چند متغیره و مشتقات جزئی

# فصل اول: انتگرال

**اگر $F'(x) = f(x)$ برای هر x در بازهٔ I، تابع $F(x)$ یک پادمشتق (تابع اولیه) $f(x)$ است و انتگرال نامعین f را با $\int f(x)dx = F(x) + C$ نشان می‌دهیم.**

## انتگرال نامعین

- یافتن شیب خط مماس با مشتق و یافتن مساحت ناحیه‌های بی‌شکل هندسی با انتگرال، دو هدف پایه‌ای حساب دیفرانسیل و انتگرال است؛ این فصل اول انتگرال نامعین، بعد انتگرال معین و در پایان کاربردهای آن در اقتصاد را می‌آورد.
- عکس عمل مشتق‌گیری را «عمل پادمشتق» یا «یافتن تابع اولیه» می‌نامیم؛ یعنی با داشتن ضابطهٔ $f(x)$ تابعی پیدا کنیم که مشتقش $f(x)$ باشد.
- مثال: یک تابع اولیه برای $f(x) = 2x$ تابع $F(x) = x^2$ است، چون $F'(x) = 2x$؛ ولی $x^2 + 1$، $x^2 + 3$، $x^2 + \sqrt{2}$ و $x^2 + (-5)$ هم مشتقشان $2x$ است، پس $2x$ بی‌نهایت پادمشتق دارد و همه را با $x^2 + C$ نشان می‌دهیم: $\int 2xdx = x^2 + C$.
- $\int f(x)dx$ یک خانواده از توابع را نشان می‌دهد، یعنی خانوادهٔ $F(x) + C$؛ عدد ثابت C را **ثابت انتگرال‌گیری** می‌گوییم.
- نماد دیفرانسیلی dx که هم در مشتق‌گیری $\frac{d}{dx}(\dots)$ و هم در انتگرال $\int(\dots)dx$ آمده، مشخص‌کنندهٔ متغیر مستقل است؛ مثلاً $\frac{d}{dt}(\sqrt{t}) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ پس $\int \frac{1}{2\sqrt{t}}dt = \sqrt{t} + C$، و $\frac{d}{d\theta}(\tan\theta) = \sec^2\theta$ پس $\int \sec^2\theta d\theta = \tan\theta + C$.

### فرمول‌های انتگرال

- فرمول‌های اصلی انتگرال مستقیماً از فرمول‌های مشتق به دست آمده‌اند و اولین گام در حل هر مسئلهٔ انتگرال، به خاطر داشتن آن‌هاست:
  - $\int 0dx = C$ ، $\int 1dx = x + C$ ، $\int adx = ax + C$
  - $\int \cos x dx = \sin x + C$ ، $\int \sin x dx = -\cos x + C$
  - $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$ ، $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$ ، $\int e^x dx = e^x + C$

**فرمول توانی انتگرال: $\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C$ به شرط $r \neq -1$؛ و برای توان $-1$: $\int \frac{dx}{x} = \int x^{-1}dx = \ln|x| + C$**

- مثال: $\int x^{۶}dx = \frac{x^{۷}}{۷} + C$ ، $\int \sqrt[۴]{x}dx = \int x^{\frac{۱}{۴}}dx = \frac{۴}{۵}x^{\frac{۵}{۴}} + C$ ، $\int \frac{۱}{x}dx = \ln|x| + C$ ، $\int \frac{۱}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-\frac{۱}{۲}}dx = ۲\sqrt{x} + C$.
- یادآوری قواعد رادیکال و توان که در این حل‌ها به کار رفت: $\sqrt{a} = a^{\frac{۱}{۲}}$ ، $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$ ، $\frac{۱}{a} = a^{-۱}$ ، $\frac{۱}{a^n} = a^{-n}$ .

## قواعد اساسی انتگرال

- **الف) ضریب ثابت از انتگرال عبور می‌کند:** $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ (همان‌طور که در مشتق $(kf)' = kf'$)؛ مثلاً $\int -۹x^{۲}dx = -۳x^{۳} + C$ و $\int \frac{x}{۵}dx = \frac{x^{۲}}{۱۰} + C$.
- **ب) جمع و تفریق:** $\int (f \pm g)dx = \int fdx \pm \int gdx$؛ این قاعده برای هر تعداد متناهی تابع هم برقرار است؛ مثلاً $\int (x^{۲} + \sqrt{x})dx = \frac{x^{۳}}{۳} + \frac{۲x\sqrt{x}}{۳} + C$ و $\int (e^x + ۳\sin x)dx = e^x - ۳\cos x + C$.
- مثال: $\int -۷x(۳x^{۲} - ۵)dx = \int (-۲۱x^{۳} + ۳۵x)dx = -\frac{۲۱}{۴}x^{۴} + \frac{۳۵}{۲}x^{۲} + C$ و $\int (۲x + ۱)^{۲}dx = \int (۴x^{۲} + ۴x + ۱)dx = \frac{۴}{۳}x^{۳} + ۲x^{۲} + x + C$؛ یعنی حاصل‌ضرب‌ها را اول باز می‌کنیم، بعد جمله‌به‌جمله انتگرال می‌گیریم.
- مثال: پادمشتق $G(x)$ از $f(x) = x^{۲} + x + ۱$ با شرط $G(۰) = ۱$: صورت کلی $G(x) = \frac{x^{۳}}{۳} + \frac{x^{۲}}{۲} + x + C$ است و شرط $G(۰) = ۱$ می‌دهد $C = ۱$، پس $G(x) = \frac{x^{۳}}{۳} + \frac{x^{۲}}{۲} + x + ۱$.
- **ج) مشتق‌گیری از انتگرال:** $\frac{d}{dx}(\int f(x)dx) = f(x)$؛ مثلاً $\frac{d}{dx}(\int \sin^{۵}x dx) = \sin^{۵}x$ و $\frac{d}{dx}(\int x\ln x dx) = x\ln x$ .
- **د) انتگرال‌گیری از مشتق:** $\int \frac{d}{dx}(f(x))dx = \int f'(x)dx = f(x) + C$؛ مثلاً $\int \tan^{۲}x dx = \int ((۱ + \tan^{۲}x) - ۱)dx = \tan x - x + C$.

⚠ **برخلاف مشتق‌گیری، برای ضرب و تقسیم انتگرال‌ها قاعدهٔ خاصی وجود ندارد: در حالت کلی $\int f(x)g(x)dx$ با $\int f(x)dx \int g(x)dx$ و $\int \frac{f(x)}{g(x)}dx$ با $\frac{\int f(x)dx}{\int g(x)dx}$ برابر نیست.**

## توابع کل و نهایی

- اگر $q$ مقدار تولید روزانهٔ یک بنگاه و $MC(q)$ و $TC(q)$ به‌ترتیب هزینهٔ نهایی و هزینهٔ کل باشند، $\frac{d}{dq}(TC(q)) = MC(q)$ ؛ پس با داشتن هزینهٔ نهایی، هزینهٔ کل از انتگرال‌گیری به دست می‌آید.
- ثابت انتگرال‌گیری $C$ در تابع هزینهٔ کل همان **هزینه‌های ثابت** بنگاه است، یعنی هزینه‌ای که در حالت $q = ۰$ هم وجود دارد.

به همین ترتیب $\frac{d}{dq}(TR(q)) = MR(q)$ ، یعنی درآمد کل از انتگرال درآمد نهایی به دست می‌آید؛ چون درآمد کل در $q = ۰$ صفر است، ثابت انتگرال‌گیری درآمد کل همیشه صفر است.

**$TR(q) = \int MR(q)dq$ و $TC(q) = \int MC(q)dq$**

مثال: $MC(q) = ۶q^۲ - ۶q + ۵$ و هزینهٔ کل در $q = ۴$ برابر ۲۰۰ است؛ $TC(q) = ۲q^۳ - ۳q^۲ + ۵q + C$ و از $TC(۴) = ۱۲۸ - ۴۸ + ۲۰ + C = ۲۰۰$ نتیجه می‌شود $C = ۱۰۰$، پس $TC(q) = ۲q^۳ - ۳q^۲ + ۵q + ۱۰۰$.

مثال: $MR(q) = ۸ - ۰/۲q$ آنگاه $TR(q) = \int(۸ - ۰/۲q)dq = ۸q - ۰/۱q^۲$ (ثابت صفر، چون $TR(۰) = ۰$).

## روش تغییر متغیر در انتگرال‌گیری

ساده‌ترین ترفند انتگرال‌گیری، گذاشتن یک متغیر جدید به جای یک عبارت برحسب متغیر اولیه است؛ مثلاً $\int(۱ + x)^۲dx$ را می‌شود با باز کردن پرانتز حل کرد، ولی برای $\int(۱ + x)^{۱۰۰}dx$ این کار عملی نیست.

با $u = ۱ + x$ از دیفرانسیل‌گیری طرفین $du = dx$ و $\int(۱ + x)^{۱۰۰}dx = \int u^{۱۰۰}du = \frac{(۱ + x)^{۱۰۱}}{۱۰۱} + C$.

مثال‌ها:

- $\int ۲x(x^۲ - ۱)^{۴۵}dx$ با $u = x^۲ - ۱$، $du = ۲xdx$: حاصل $\frac{(x^۲ - ۱)^{۴۶}}{۴۶} + C$.
- $\int \sqrt[۳]{(۳ - x)}dx$ با $u = ۳ - x$، $dx = -du$: حاصل $-\frac{۳(۳ - x)^{\frac{۴}{۳}}}{۴} + C$.
- $\int \cos(x + ۴)dx$ با $u = x + ۴$: حاصل $\sin(x + ۴) + C$.

مراحل روش: متغیر جدید u را مناسب انتخاب می‌کنیم، du را حساب و جایگذاری می‌کنیم تا انتگرال با فرمول‌ها و قواعد قابل حل شود؛ پس از حل، **جواب را دوباره برحسب متغیر اولیهٔ مسئله** می‌نویسیم.

انتخاب مناسب متغیر جدید ممکن است در ابتدا چالش‌برانگیز باشد، ولی با تمرین فراوان مهارت کافی به دست می‌آید.

**فرمول‌های میان‌بر حاصل از تغییر متغیر: $\int f'(x)(f(x))^n dx = \frac{(f(x))^{n+۱}}{n+۱} + C$ برای $n \neq -۱$ ، و برای $n = -۱$:**
**$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln|f(x)| + C$**

میان‌برهای مثلثاتی و نمایی: $\int \sin axdx = -\frac{۱}{a}\cos ax + C$ ، $\int \cos axdx = \frac{۱}{a}\sin ax + C$ ، $\int e^{ax}dx = \frac{۱}{a}e^{ax} + C$.

مثال‌های کاربرد میان‌برها:

- $\int \cos x \sin xdx = \frac{(\sin x)^۲}{۲} + C$ و $\int e^x(e^x + ۲)dx = \frac{(e^x + ۲)^۲}{۲} + C$

$$\int \sin x \cos^{۷} x dx = -\int (-\sin x)\cos^{۷} x dx = -\frac{\cos^{۸} x}{۸} + C$$

$$\int \tan x dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \frac{x^{۲}+۱}{x^{۳}+۳x} dx = \frac{۱}{۳}\int \frac{۳x^{۲}+۳}{x^{۳}+۳x} dx = \frac{۱}{۳}\ln|x^{۳}+۳x| + C$$

$$\int (e^{۵x} - \sin\frac{x}{۲})dx = \frac{۱}{۵}e^{۵x} + ۲\cos\frac{x}{۲} + C$$

## روش انتگرال‌گیری جزء به جزء

این روش انتگرال‌های دشوار، به‌ویژه انتگرال **حاصل‌ضرب دو تابع**، را به انتگرال ساده‌تر تبدیل می‌کند و بر پایهٔ قاعدهٔ مشتق حاصل‌ضرب $(uv)' = u'v + v'u$ است؛ با انتگرال‌گیری از طرفین و $du = u'dx$، $dv = v'dx$ داریم $uv = \int vdu + \int udv$.

**فرمول جزء به جزء: $\int udv = uv - \int vdu$** 💡

مثال $\int x\cos x dx$: با $u = x$ و $dv = \cos x dx$ داریم $du = dx$، $v = \sin x$ و $\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C$.

هنگام انتگرال گرفتن از dv برای محاسبهٔ v، ثابت انتگرال‌گیری را حذف می‌کنیم؛ این نکته در همهٔ انتگرال‌هایی که به این روش حل می‌شوند برقرار است.

مهم‌ترین قسمت کار انتخاب درست u و dv است و روش کلی مشخصی ندارد؛ نکتهٔ مفید این است که u تابعی باشد که پس از مشتق‌گیری ساده‌تر شود و انتگرال‌گیری از dv آسان باشد.

⚠ **اگر در همان $\int x\cos x dx$ بگیریم $u = \cos x$ و $dv = xdx$، به $\frac{۱}{۲}\int x^{۲}\sin x dx + \frac{x^{۲}}{۲}\cos x$ می‌رسیم که از انتگرال اولیه دشوارتر است؛ انتخاب نادرست u و dv کار را سخت‌تر می‌کند.**

مثال $\int xe^{x} dx$: با $u = x$ و $dv = e^{x}dx$ حاصل $xe^{x} - e^{x} + C$ است.

مثال $\int \ln x dx$: انتخاب $u = ۱$ و $dv = \ln x dx$ خودش مستلزم حل همین انتگرال است، پس $u = \ln x$ و $dv = dx$ می‌گیریم؛ $du = \frac{dx}{x}$، $v = x$ و $\int \ln x dx = x\ln x - x + C$.

گاهی حل با روش جزء به جزء مستلزم **چند بار** استفاده از آن است؛ مثلاً در $\int x^{۲}e^{-x}dx$ با $u = x^{۲}$، $dv = e^{-x}dx$ به $-x^{۲}e^{-x} + ۲\int xe^{-x}dx$ می‌رسیم و انتگرال دوم (که در آن $x^{۲}$ به x تبدیل شده) را دوباره جزء به جزء حل می‌کنیم: $\int x^{۲}e^{-x}dx = -x^{۲}e^{-x} + ۲(-xe^{-x} - e^{-x}) + C$.

در بعضی انتگرال‌ها پس از اعمال روش دوباره به همان مسئلهٔ اولیه می‌رسیم و این حالت هم قابل حل است؛ مثال $A = \int e^{x}\cos x dx$: با $u = \cos x$، $dv = e^{x}dx$ داریم $A = e^{x}\cos x + B$ که $B = \int e^{x}\sin x dx$، و با $u = \sin x$ داریم

$B = e^x\sin x - A$؛ پس $2A = e^x\cos x + e^x\sin x$ و $\int e^x\cos x\,dx = \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) + C$.

## روش تجزیه کسرها در انتگرال‌گیری

- تابع گویا نسبت دو چندجمله‌ای است؛ روش انتگرال‌گیری توابع گویا بر پایهٔ تجزیهٔ آن‌ها به مجموع **کسرهای جزئی** است.
- **کسر جزئی** کسر گویایی به یکی از دو شکل $\frac{A}{(ax+b)^k}$ یا $\frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^k}$ است که $k$ عدد طبیعی، $a \neq 0$ و در حالت دوم $\Delta = b^2 - 4ac < 0$؛ این شرط یعنی $ax^2 + bx + c$ قابلیت تجزیه ندارد.
- انتگرال کسر جزئی نوع اول به سادگی ممکن است: $\int \frac{A}{ax+b}\,dx = \frac{A}{a}\ln|ax+b| + C$ برای $k = 1$ و $\int \frac{A}{(ax+b)^k}\,dx = \frac{A}{a}\frac{(ax+b)^{1-k}}{1-k} + C$ برای $k \neq 1$.
- چون فرمول‌های توابع معکوس مثلثاتی در این کتاب نیامده، از نوع دوم فقط انتگرال‌هایی بررسی می‌شوند که مشتق $x^2 + px + q$ در صورت کامل باشد یا قابل ایجاد باشد؛ مثلاً $\int \frac{x}{x^2+9}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+9| + C$ و $\int \frac{x+3}{x^2+6x+11}\,dx = \frac{1}{2}\ln|x^2+6x+11| + C$.

### دسته‌بندی توابع گویا

- یک تابع گویا همیشه در یکی از سه حالت است: الف) درجهٔ صورت بیشتر از مخرج، مثل $\frac{x^3}{x^2+1}$؛ ب) درجهٔ صورت مساوی درجهٔ مخرج، مثل $\frac{x-1}{x+3}$؛ ج) درجهٔ صورت کمتر از مخرج، مثل $\frac{1}{x^2-3x+4}$. کسرهای جزئی در دستهٔ ج قرار می‌گیرند.
- در حالت‌های الف و ب با تقسیم $p(x)$ بر $q(x)$، خارج قسمت $r(x)$ و باقی‌ماندهٔ $s(x)$ به دست می‌آید که درجهٔ $s(x)$ همیشه از $q(x)$ کمتر است و $\frac{p(x)}{q(x)} = r(x) + \frac{s(x)}{q(x)}$؛ کسر $\frac{s(x)}{q(x)}$ از نوع حالت ج است.
- مثال: $\frac{x^3}{x^2+1} = x + \frac{-x}{x^2+1}$ پس $\int \frac{x^3}{x^2+1}\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln|x^2+1| + C$؛ و $\frac{x-1}{x+3} = 1 + \frac{-4}{x+3}$ پس $\int \frac{x-1}{x+3}\,dx = x - 4\ln|x+3| + C$.

### تجزیهٔ توابع گویا به کسرهای جزئی

- هر کسر گویا را می‌توان به مجموع کسرهای جزئی نوشت؛ کافی است حالتی را بررسی کنیم که درجهٔ مخرج بیشتر از صورت است. مراحل تجزیهٔ $\frac{p(x)}{q(x)}$:
  - مرحلهٔ ۱: مخرج $q(x)$ را تا جایی که امکان دارد تجزیه می‌کنیم.
  - مرحلهٔ ۲: پس از تجزیه دو نوع عامل ممکن است ظاهر شود: عامل خطی با تکرار $k$ به صورت $(ax+b)^k$، و عامل درجه دوم با تکرار $k$ به صورت $(ax^2+bx+c)^k$ با شرط $b^2 - 4ac < 0$.