فصل ۱ مقدمه

تحقیق در عملیات به طور کلی کاربرد روش‌ها و ایده‌های علمی برای بهبود کارایی فرایند صنعتی در سازمان یا به مفهوم عام، بهبود فعالیت‌های هر بخش از جامعه است که دامنه کاربرد بسیار گسترده‌ای دارد. بخش کوچکی از این دامنه به صورت زیر خلاصه می‌شود:

- ۱. تعیین تعداد گیشه‌های صندوق برای جلوگیری از تشکیل صف در یک فروشگاه زنجیره‌ای
- ۲. برای اینکه یک ایستگاه آتش‌نشانی بهترین سرویس را در کمترین زمان ارائه کند محل استقرار ایستگاه آن در کجا باشد؟
- ۳. مناسب‌ترین سیاست تعویض در یک ماشین چیست؟
- ۴. بهترین سرمایه‌گذاری در خرید سهام چگونه است؟
- ۵. اقتصادی‌ترین شیوه توزیع کالا از کارخانه به انبار کدام است؟

تحقیق در عملیات علمی میان‌رشته‌ای است. این علم همزمان و به‌گونه‌ای گسترده عناوین متفاوتی را در زمینه‌های گوناگون دربرمی‌گیرد از قبیل ریاضیات، آمار، اقتصاد، روان‌شناسی، علوم پایه و جامعه‌شناسی. هیچ‌یک از مثال‌هایی که در بالا عنوان شد نمی‌توانند به‌تنهایی با روش‌هایی که کاملاً در حوزه یک علم خاص قرار می‌گیرند حل شوند؛ بنابراین کسب موفقیت در «تحقیق در عملیات» مدیون احاطه بر تمامی جوانب بالاست. در تحقیق در عملیات بیشترین تکیه بر ریاضیات است. ما در این کتاب صرفاً به تشریح نقش ریاضیات می‌پردازیم. این بدان معنا نیست که ریاضیات نقش اصلی را در تحقیق در عملیات ایفا می‌کند. علم تحقیق در عملیات ابتدا در سال ۱۹۲۰ و در جنگ جهانی اول توسط انگلیس مطرح شد. ازآنجاکه در جنگ، مهمات و نیروی انسانی و تجهیزات محدود بود و می‌خواستند از این منابع محدود بهترین استفاده را بکنند، مبانی نظری این علم مطرح شد ولی چندان مورد توجه قرار نگرفت طوری که بعد از جنگ جهانی اول مسکوت گذاشته شد تا در سال ۱۹۴۰ مجدداً در جنگ جهانی دوم توسط آمریکایی‌ها مطرح و به طور گسترده مورد استفاده قرار گرفت، خصوصاً در نیروی دریایی و نتایج بسیار مطلوبی نیز همراه داشت. بعد از جنگ جهانی دوم از این علم در سایر بخش‌های صنعتی، بازرگانی، خدماتی و ... استفاده شد و به عنوان یک مبحث درسی وارد دروس دانشگاهی شد. تحقیق در عملیات امروزه به عنوان درس اصلی در رشته‌های مهندسی صنایع، ریاضی کاربردی و مدیریت صنعتی و بازرگانی مطرح و در سایر رشته‌های مهندسی به

صورت درس اختیاری مطرح می‌شود. اگر بخواهیم تحقیق در عملیات را تعریف کنیم باید بگوییم:

مجموعه‌ای از تکنیک‌های کمّی در دست مدیران جهت تصمیم‌گیری با هدف استفاده بهینه از منابع محدود و در دسترس

این تکنیک‌های کمّی بسیار گسترده و وسیع هستند، بخشی از آن‌ها عبارت‌اند از:

- ۱. برنامه‌ریزی خطی،
- ۲. برنامه‌ریزی غیر خطی،
- ۴. برنامه‌ریزی پویا،
- ۵. برنامه‌ریزی هندسی،
- ۷. برنامه‌ریزی فازی،
- ۸. برنامه‌ریزی عدد صحیح و ...
- ۳. برنامه‌ریزی چندهدفی،
- ۶. برنامه‌ریزی احتمالی،

تأکید این کتاب بر برنامه‌ریزی خطی و کاربردهای آن است. آنچه در همه تکنیک‌های ذکرشده به طور مشترک مطرح است، بحث مدل‌سازی است. در تمام این تکنیک‌ها دنبال یک مدل ریاضی هستیم که بیانگر واقعیت باشد. ازآنجاکه در ریاضیات، امکان به‌کارگیری مدل واقعی وجود ندارد، با استفاده از فرضیات، آن واقعیت را مدل‌سازی می‌کنیم. این مدل‌سازی ریاضی، دارای ساختار خاصی دارد؛ در این مدل ریاضی سه بخش به تفکیک قابل رؤیت است:

۱-۱ متغیر تصمیم‌گیری Decision Variable

ازآنجاکه تکنیک‌های مطرح‌شده در تحقیق در عملیات جهت تصمیم‌گیری به کار می‌رود، بنابراین ابتدا باید متغیر تصمیم‌گیری در آن واقعیت مفروض تعریف شود. تعریف این متغیر تصمیم به تجربه، خلاقیت و هنر فرد مدل‌ساز بستگی دارد. این متغیر تصمیم در دو بخش دیگر این مدل ریاضی قابل استفاده است. به عنوان مثال میزان تولید محصول نوع iام (x_i) در یک مسئله تولیدی می‌تواند متغیر تصمیم باشد؛ شیوه i ام تولید (y_i) در یک مسئله برنامه‌ریزی تولید می‌تواند متغیر تصمیم‌گیری باشد.

۱-۲ تابع هدف Objective Function

هر سیستم هدفی دارد. ممکن است برخی از سیستم‌ها اهداف متعدد و چندگانه‌ای را دنبال کنند؛ برنامه‌ریزی چندهدفی مختص این نوع سیستم‌ها است. ولی در برنامه‌ریزی خطی، فرض بر این است که یک هدف از تمامی اهداف یک سیستم والاتر و بالاتر است. بنابراین مدل‌ساز باید بتواند هدف سیستم را در قالب یک تابع ریاضی از متغیرهای تصمیم‌گیری بیان کند. $f(x_1\ x_2 \ldots x_n)$ اگر این تابع را z بنامیم و این تابع بیانگر سود یا بهره‌وری یا درآمد و ... باشد، تابع z باید ماکزیمم شود و اگر تابع بالا بیانگر هزینه، ضایعات، بیکاری و ... باشد تابع z باید حداقل شود. بنابراین به زبان ریاضی داریم:

$$\begin{matrix} \text{Max} \\ \text{یا} \\ \text{Min} \end{matrix} \quad Z = f(x_1\ x_2 \ldots x_n)$$

۱-۳ محدودیت‌ها Constraints

برای دستیابی به هر هدفی باید منابع مصرف شوند. منظور از منابع، نیروی انسانی، ماشین‌آلات، زمان، مکان، بودجه، ماده اولیه و ... است. همه این منابع محدود هستند. مدل‌ساز باید مصرف هر منبع را در قالب یک تابع ریاضی از متغیرهای تصمیم‌گیری در مقایسه با میزان منبع در دسترس به صورت یک معادله یا نامعادله نشان دهد. فرض کنید m نوع منبع در اختیار باشد، به بیان ریاضی داریم:

$$g_i(x_1\ x_2 \ldots x_n) \ \begin{matrix} \leq \\ = \\ \geq \end{matrix} \ b_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m$$

b_i میزان منبع در دسترس iام است.

بنابراین می‌خواهیم با توجه به محدودیت‌های منابع به هدف z دسترسی پیدا کنیم. عبارت subject to به اختصار st نام‌گذاری شده و داریم:

$$\text{Max}\ \text{یا}\ \text{Min}\ Z = f(x_1\ x_2\ \dots\ x_n)$$

$$\text{st:}\quad g_i(x_1\ x_2\ \dots\ x_n)\ \begin{matrix} \le \\ = \\ \ge \end{matrix}\ b_i$$

$$i = 1, 2, \dots, m$$

هرگاه f و g_iها توابع خطی باشند، مدل را مدل خطی یا مدل برنامه‌ریزی خطی Linear Programming (LP) می‌نامند.

با توجه به فرض اخیر مدل بالا به صورت‌های زیر مطرح می‌شود:

$$1)\ \text{Min}\ \text{یا}\ \text{Max}\quad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

$$\begin{aligned} \text{st:}\quad & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \begin{matrix} \le \\ = \\ \ge \end{matrix} b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \begin{matrix} \le \\ = \\ \ge \end{matrix} b_2 \\ & \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \begin{matrix} \le \\ = \\ \ge \end{matrix} b_m \end{aligned}$$

$$2)\ \text{Max}\ \text{یا}\ \text{Min}\quad Z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$$

$$\text{st:}\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \begin{matrix} \le \\ = \end{matrix} b_i$$

$$\geq$$

$$i = 1 , 2 , \dots , m$$

3) $C(c_1 , c_2 \dots , c_n)$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Min یا Max $\quad Z = CX$

$$\text{st :} \quad AX \begin{matrix} \leq \\ = \\ \geq \end{matrix} b$$

فرم ماتریسی اخیر بیشترین کاربرد را در مطرح کردن بنیان‌های ریاضی تحقیق در عملیات دارد.

برنامه‌ریزی خطی، روی ۴ فرض زیر بنا شده است:

✅ ۱. متناسب بودن: متغیرهای تصمیم‌گیری مستقل از یکدیگر هستند و با توجه به مقداری که دریافت می‌کنند متناسب با ضریب خود در تابع هدف Z، سود یا هزینه تولید می‌کنند و متناسب با ضریب مصرفشان در محدودیت‌ها از منابع استفاده می‌کنند. این بدان معناست که اگر $x_1 = 1$ بشود به اندازه $1c_1$ سود یا هزینه تولید می‌شود و اگر $x_1 = 100$ بشود $100c_1$ سود یا هزینه تولید می‌شود. حال آنکه ممکن است در واقعیت این فرض درست نباشد. به همین ترتیب در مصرف منابع هم چنانچه $x_1 = 1$ باشد از منبع 1 که به اندازه b_1 در دسترس است به اندازه $1a_{11}$ مصرف می‌شود و اگر $x_1 = 10$ باشد به اندازه

$10a_{11}$ از b_1 مصرف می‌شود. حال آنکه ممکن است درعمل چنین نباشد.

۲. جمع‌پذیری: هیچ رابطه متقابلی بین متغیرهای تصمیم وجود ندارد. همواره مضربی از متغیرها با یکدیگر جمع جبری می‌شوند.

فرض متناسب بودن و جمع‌پذیری توأماً باعث خطی بودن مدل می‌شود.

۳. بخش‌پذیری: متغیرهای تصمیم صرف‌نظر از تعریفشان هر مقداری را می‌توانند دریافت کنند. به عبارت دیگر متغیرهای تصمیم پیوسته‌اند. به عنوان مثال اگر متغیر تصمیم‌گیری x_1 در مدلی با عنوان میزان اتوبوس‌های تولیدشده نوع 1 معرفی شود، این امکان وجود دارد که پس از حل مدل ریاضی $x_1 = 10.5$ شود. بنابراین فرض بر این است که می‌تواند 10.5 اتوبوس هم تولید شود.

۴. معین بودن: در مدل ریاضی مورد بحث از مقادیر a_{ij} ، c_j ، b_i استفاده می‌شود. این مقادیر را پارامترهای مدل خطی می‌گویند که در اختیار مدل‌ساز قرار می‌گیرد. فرض بر این است که این مقادیر مشخص و معین هستند. به عنوان مثال در برنامه‌ریزی خطی احتمالی یا فازی فرض معین بودن وجود ندارد و در برنامه‌ریزی عدد صحیح و خطی فرض بخش‌پذیری وجود ندارد.

به طور کلی مراحلی که در یک مسئله بهینه‌سازی باید طی شود عبارت‌اند از:

۱- تعریف مسئله

۲- ساختن مدل ریاضی

۳- حل و بحث مدل ریاضی

۴- معتبر بودن مدل

۵- پیاده‌سازی مدل

تأکید کتاب حاضر بیشتر بر سه بحث اول است.

مجموعه سوالات مبحث تعریف مسئله و مدل سازی ریاضی

مسایل تستی

۱. زمان تولید هر واحد محصول 1 نصف زمان تولید هر واحد محصول 2 و 2/3 زمان تولید هر واحد محصول 3 است. اگر شرکت تمام زمان خود را صرف تولید محصول 2 کند حداکثر 500 واحد از این محصول می‌تواند بسازد. محدودیتی که مسئله بالا را بیان می‌کند در کدام گزینه است؟

- 1) $2x_1 + x_2 + x_3 \le 2000$
- 2) $x_1 + 2x_2 + x_3 \le 1500$
- 3) $2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \le 2000$
- 4) $x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 1500$

۲. یک محصول از مونتاژ سه قطعه A و B و C ساخته می‌شود. برای محصول مونتاژ به دو قطعه از نوع A، یک قطعه از نوع B و سه قطعه از نوع C نیاز است. اگر x_A و x_B و x_C مقدار تولید هر یک از این قطعات را نشان دهد و هدف افزایش محصول تکمیل شده باشد تابع هدف مدل عبارت است از:

- 1) $\text{Max } Z = \min \{ x_A , x_B , x_C \}$
- 2) $\text{Max } Z = \min \{ 2x_A , x_B , 3x_C \}$
- 3) $\text{Max } Z = \min \{ x_A + x_B + x_C \}$
- 4) $\text{Max } Z = \min \{ x_A/2 , x_B , x_C/3 \}$

۳. از دو نوع نفت تصفیه شده داخلی و خارجی، دو نوع بنزین نوع P و R تولید می‌شود. ماکزیمم فشار بخار و مینیمم درجه اکتان موجود در نفت‌ها و مورد نیاز در بنزین‌ها در هر بشکه، در جدول زیر داده شده است. اگر میزان مصرف نفت در تولید بنزین مطابق جدول زیر برحسب بشکه باشد میزان درجه اکتان مورد نیاز در بنزین نوع R چقدر است؟

دقت کنید:

نفت / بنزین	R	P
داخلی	x_1	x_3
خارجی	x_2	x_4

	ماکزیمم فشار بخار	مینیمم درجه اکتان
نفت داخلی	20	78
نفت خارجی	18	89
بنزین نوع R	24	85
بنزین نوع P	22	96

1) $7x_1 - 4x_2 \le 0$

2) $7x_1 - 4x_2 \ge 0$

3) $7x_1 + 8x_2 \ge 0$

4) $7x_1 + 8x_2 \le 0$

۴. مجموعه‌ای از m معادله خطی با n متغیر را در نظر بگیرید. این مجموعه را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$\sum a_{ij}x_j = b_i , i=1 , 2 , \dots , m$

فرض کنید این معادلات با یکدیگر ناسازگار باشند؛ مسئله حداقل خطا مقادیری برای x_1 تا x_n تعیین می‌کند تا بزرگ‌ترین اختلاف بین سمت راست و چپ معادلات حداقل شود. یک متغیر به نام x_0 در نظر بگیرید. ($x_0 \ge 0$) برای اینکه برای هر معادله اختلاف میان دو طرف معادله کمتر از x_0 باشد می‌توان مسئله را به صورت یک مدل خطی فرموله کرد. کدام‌یک از مدل‌های زیر برای این منظور مناسب است؟

1) Min x_0

st: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = x_0 , i = 1, 2, \dots, m$

2) Min x_0