

۲۵ کد درس در یک فایل | جدول کد درس ← فصل و حذفیات | ۱۰۴ تمرین کتاب با حل کامل

همه مثال‌ها با برنامه حل‌شده | ۷ خطای کتاب علامت‌خورده | حد، مشتق و کاربرد مشتق

منبع رسمی پیام‌نور

ریاضیات پایه

خلاصه طبقه‌بندی‌شده شش فصل – از مجموعه‌ها تا حد، مشتق و کاربردهای آن

منبع: کتاب ریاضیات پایه – لیدا فرخو (انتشارات دانشگاه پیام نور)

کد درس:
1111001، 1111002، 1111004، 1111005، 1111009، 1111012، 1111014، 1111117، 1111300، 1111301،
1111497، 1111650، 1111655، 1214150، 1214222، 1216761، 1216865، 1218713، 1218787، 1218882،
1221263، 1221289، 1221377، 1241182، 1241250

آخرین به‌روزرسانی: آبان ۱۴۰۵

نویسنده جزوه //
تیم تألیف بژیک

مناسب برای درس‌های //
ریاضیات پایه، ریاضیات ۱، ریاضی کاربردی

کیفیت //
هر مثال عددی با برنامه دوباره حل شده

ساختار //
۲۸ کادر «دقت کنید» و ۳۷ قاعده طلایی

۵۱ صفحه مفید

۲۵ کد درس

۱۰۴ تمرین با حل

© Copyrights - bzhik.ir

خلاصه کتاب ریاضیات پایه، لیدا فرخو

ریاضیات پایه (رشته‌های حسابداری، مدیریت و علوم اجتماعی) · منبع رسمی دانشگاه پیام نور

منبع ریاضیات پایه، لیدا فرخو، انتشارات دانشگاه پیام نور

پوشش شش فصل: نظریهٔ مجموعه‌ها، دستگاه‌های مختصات، رابطه و تابع، حد و پیوستگی، مشتق و کاربردهای مشتق؛ با جدول کد درس و حذفیات اعلام‌شدهٔ هر کد

ویژگی همهٔ مثال‌های عددی (حد، مشتق، معادله و تابع) با برنامه دوباره حل شده‌اند؛ هر جا کتاب خطای چاپی یا محاسباتی داشته، در کادر «دقت کنید» علامت خورده و جواب درست کنارش آمده است؛ آخر هر فصل خودآزمایی منتخب کتاب با حل کامل

کد درس خود را پیدا کنید و فصل‌های ردیف خودتان را بخوانید

کد درس	نام درس در گلستان	فصل‌هایی که باید بخوانید
1111001	ریاضیات پایه	فصل ۱ تا ۶ با بیشترین حذفیات (بخش ۲-۳، صفحه‌های مشخص‌شده و اثبات قضیه‌ها در کل کتاب)
1111012	ریاضیات پایه و مقدمات آمار	فصل ۱ تا ۶ با حذفیات
1111014	ریاضیات پایه و مقدمات آمار ۱	فصل ۱ تا ۶ با حذفیات
1111497	ریاضیات پایه	فصل ۱ تا ۶ با حذفیات
1214150	ریاضی کاربردی ۱	فصل ۱ تا ۶ با حذفیات
1241250	ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت ۱	فصل ۱ تا ۶ با حذفیات
1111004	ریاضیات کاربردی در مدیریت جهانگردی	فصل ۱ تا ۶ با حذفیات
1111005	ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت ۱	فصل ۱ تا ۶ با حذفیات
1111009	ریاضیات پایه	فصل ۱ تا ۶ با حذفیات
1111117	ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت ۱	فصل ۱ تا ۶ با حذفیات
1111650	ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت	فصل ۱ تا ۶ با حذفیات
1214222	ریاضیات کاربردی در حسابداری ۱	فصل ۱ تا ۶ با حذفیات
1218787	ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت ۱	فصل ۱ تا ۶ با حذفیات
1218882	ریاضیات کاربردی در گردشگری	فصل ۱ تا ۶ با حذفیات
1241182	ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت ۱	فصل ۱ تا ۶ با حذفیات
1111655	ریاضیات پایه	حذفیات اعلام‌شده فصل ۱ تا ۵ را نام برده است
1111002	ریاضیات ۱	حذفیات اعلام‌شده فقط فصل ۱ تا ۴ را نام برده است
1111300	ریاضیات مقدماتی	حذفیات اعلام‌شده فقط فصل ۱ تا ۴ را نام برده است
1111301	ریاضیات پیشرفته	حذفیات اعلام‌شده فقط فصل ۵ و ۶ را نام برده است
1216761	ریاضیات و آب و هواشناسی	فقط فصل ۵ و ۶ با حذفیات
1216865	ریاضیات برای جغرافیا ۲	فقط فصل ۵ و ۶ با حذفیات
1218713	ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت ۱	همهٔ کتاب، بدون حذفیات اعلام‌شده
1221263	ریاضیات ۱	همهٔ کتاب، بدون حذفیات اعلام‌شده
1221289	ریاضیات برای اقتصاد ۱	همهٔ کتاب، بدون حذفیات اعلام‌شده
1221377	ریاضیات ۱	همهٔ کتاب، بدون حذفیات اعلام‌شده

⚠️ حذفیات هر فصل در همان فصل، در کادر «دقت کنید» با نام کدها آمده است. برای کدهای 1111002، 1111300، 1111301 و 1111655 فهرست حذفیات فقط بعضی فصل‌ها را نام برده؛ محدودهٔ دقیق امتحان را از استاد یا اطلاعیهٔ دانشگاه بپرسید. این فایل برای کتاب «ریاضیات پایه» لیدا فرخو است؛ درس «ریاضیات پایه و مقدمات آمار ۲» (کد 1111015) کتاب دیگری از موسی‌الرضا شمسیه زاهدی دارد و در این فایل نیست. پیش از مطالعه، کد درس را در انتخاب واحد گلستان با جدول بالا تطبیق دهید.

فهرست فصل‌ها

- فصل اول: نظریهٔ مجموعه‌ها
- فصل دوم: دستگاههای مختصات
- فصل سوم: رابطه و تابع
- فصل چهارم: حد و پیوستگی توابع
- فصل پنجم: مشتق
- فصل ششم: کاربردهای مشتق

فصل اول: نظریهٔ مجموعه‌ها

یک مجموعه از نظر ریاضی هنگامی معین است که اشیای تشکیل‌دهندهٔ آن کاملاً مشخص باشند؛ یعنی برای هر شیء بتوان به دقت تعیین کرد که به آن مجموعه تعلق دارد یا ندارد.

مفهوم مجموعه

مفهوم شهودی مجموعه

- مفهوم ریاضی مجموعه با مفهوم شهودی (عادی یا روزمره) آن فرق دارد؛ «مجموعهٔ» دانشجویان رشتهٔ مدیریت دانشگاه‌های ایران مجموعهٔ ریاضی است، چون تک‌تک افرادش دقیقاً مشخص می‌شوند.
- دستهٔ دانشجویان باهوش دانشگاه تهران مجموعه نیست، چون باهوش بودن صفتی نسبی است (مطلق نیست) و نمی‌توان دقیقاً تعیین کرد کدام دانشجو باهوش است؛ صفاتی مثل مهارت، تبحر، زیبایی، زشتی، کوچکی، بزرگی، خوشمزگی و خوش‌سلیقگی که تعریف دقیق ندارند، مجموعه مشخص نمی‌کنند.
- هر شیء متعلق به یک مجموعه را **عضو** یا **عنصر** آن مجموعه می‌نامیم؛ نمونه‌های مجموعه: دستهٔ اعداد صحیح از ۱ تا ۱۰۰، حروف الفبای فارسی، روزهای هفته، دانشجویان پیام نور با سن کمتر از ۲۵ و سیارات منظومهٔ شمسی.

قرارداد نمادها

- اگر x عضوی از مجموعهٔ S باشد می‌نویسیم $x \in S$ و می‌خوانیم «x متعلق به S است»؛ نقیض آن $x \notin S$ است یعنی «x عضو S نیست».
- مجموعه‌ها را با حروف بزرگ لاتین (A، B، C، D) و عضوها را با حروف کوچک (a، b، c، d) نشان می‌دهیم.

نمایش مجموعه‌ها

- **روش فهرستی:** همهٔ عضوها را با «،» از هم جدا و داخل ابرو می‌آوریم، مثل $A = \{۲, ۴, ۶, ۸\}$؛ ترتیب نوشتن عضوها اهمیت ندارد و $\{۱, ۲, ۳\}$ و $\{۳, ۱, ۲\}$ یک مجموعه‌اند.
- **روش توصیفی:** وقتی نوشتن همهٔ عضوها عملی نیست، اگر گزارهٔ P(x) خاصیت مشترک عضوها باشد می‌نویسیم $S = \{x \mid P(x)\}$؛ مثلاً $A = \{x \in Q \mid (۲x - ۱)(۳x + ۴) = ۰\}$.
- نمونه‌ها: اعداد اول بین ۱ تا ۳۰ برابر $\{۲, ۳, ۵, ۷, ۱۱, ۱۳, ۱۷, ۱۹, ۲۳, ۲۹\}$ است؛ ریشه‌های حقیقی معادله به صورت $\{x \in R \mid x^۲ + ۴x - ۱ = ۰\}$ نوشته می‌شود؛ اعداد صحیح مثبت فرد هم $\{x \mid x = ۲k - ۱, k \in N\}$ است و هم $\{۱, ۳, ۵, ۷, ...\}$.

مجموعهٔ تهی و یکانی

- مجموعهٔ اعداد صحیحی که $5x = 1$ و مجموعهٔ ریشه‌های حقیقی $x^2 + 1 = 0$ هیچ عضوی ندارند، زیرا برای هر عدد حقیقی همواره $x^2 + 1 \geq 1$.
- **مجموعهٔ تهی:** مجموعه‌ای که هیچ عضوی ندارد و با حرف یونانی ϕ (فی) نشان داده می‌شود؛ $S \neq \phi$ یعنی S ناتهی است و این وقتی برقرار است که S دست‌کم یک عضو داشته باشد.
- **مجموعهٔ یکانی:** مجموعه‌ای که فقط یک عضو دارد، مثل {۲}، {-۷۳}، {۰} و {a}.

> ⚠ دقت کنید: {۰} مجموعهٔ یکانی است، نه تهی؛ یک عضو دارد که آن عضو عدد صفر است.

زیرمجموعه و زیرمجموعهٔ سره

- توجه: این فایل رایگان نیست و منحصرا برای سایت "بژیک" با آدرس اینترنتی www.bzhik.ir تهیه و تنظیم شده است. تمام حقوق مادی و معنوی این محصول، متعلق به سایت "بژیک" می باشد؛ هر گونه کپی برداری و انتشار غیر قانونی آن توسط افراد سودجو، بدون اخطار قبلی، پیگرد قانونی در پی خواهد داشت؛ لذا بایستی مستقیما از این سایت خریداری شود در غیر این صورت مسئولین راضی نمی باشند و حرام و حق الناس می باشد
- اگر هر عضو A عضو B هم باشد، A را زیرمجموعهٔ B می‌نامیم و می‌نویسیم $A \subseteq B$ («B شامل A است»)؛ نماد $\supseteq$ علامت **شمول** یا **جزئیت** است و نقیض آن $A \not\subset B$ است.
- **زیرمجموعهٔ سره:** اگر $A \subseteq B$ و B دست‌کم یک عضو داشته باشد که در A نیست، می‌نویسیم $A \subset B$.
- مثال: اگر $A = \{x \mid x \in Z^+, x \leq ۱۰۰\}$ و $B = \{x \mid x \in Z^+, x \leq ۵۰\}$ باشد، $B \subset A$ است، چون $۸۰ \in A$ ولی $۸۰ \notin B$ ؛ مجموعهٔ C (اعداد صحیح مثبت بخش‌پذیر بر ۴ و کوچک‌تر یا مساوی ۷۲۰) زیرمجموعهٔ A نیست، چون $۱۸۰ \in C$ ولی $۱۸۰ \notin A$؛ A هم زیرمجموعهٔ C نیست، چون $۲۹ \in A$ ولی $۲۹ \notin C$.
- **قضیه:** مجموعهٔ تهی زیرمجموعهٔ هر مجموعه‌ای است (اگر نبود، باید عضوی می‌داشت که در S نیست و این برای تهی ممکن نیست)؛ نتیجه اینکه دقیقاً یک مجموعهٔ تهی وجود دارد.

> ⚠ دقت کنید: نماد $\supseteq$ فقط بین دو مجموعه و نماد $\ni$ بین یک عضو و یک مجموعه به کار می‌رود. برای $A = \{a, b, c\}$ عبارت‌های $\{a\} \subset A$ و $a \in A$ درست‌اند ولی $a \subset A$ و $\{b\} \in A$ نادرست‌اند.

تعداد زیرمجموعه‌ها و مجموعهٔ توانی

- زیرمجموعه‌های $A = \{a, b, c\}$ عبارت‌اند از $\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}$، یعنی ۸ زیرمجموعه.
- **قضیه:** اگر تعداد عضوهای A برابر عدد طبیعی n باشد، تعداد کل زیرمجموعه‌های آن 2^n است.
- **مجموعهٔ توانی** $P(A)$ مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های A است؛ برای $A = \{a, b\}$ داریم $P(A) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ و در حالت کلی $P(A)$ دارای 2^n عضو است.

تساوی مجموعه‌ها و مجموعهٔ جهانی

- دو مجموعهٔ A و B مساوی‌اند ($A = B$) اگر و تنها اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq A$؛ به بیان دیگر اگر و تنها اگر عضوهای یکسان داشته باشند.
- مجموعه‌هایی که در هر بحث ریاضی بررسی می‌شوند خودشان زیرمجموعه‌های مجموعهٔ بزرگی به نام **مجموعهٔ جهانی** هستند که با حرف U نشان داده می‌شود؛ پس برای هر مجموعهٔ A داریم $A \subseteq U$.
- مثال: برای بررسی تولیدات کارخانهٔ A در تهران، هر یک از این‌ها را می‌توان مجموعهٔ جهانی گرفت: تولیدات همهٔ کارخانه‌های شهر تهران، استان تهران یا کل کشور.

بازه‌ها

- فرض کنید a و b دو عدد حقیقی باشند و $a < b$:
  - **بازهٔ بسته:** $[a, b] = \{x \in R \mid a \le x \le b\}$.
  - **بازهٔ باز:** $(a, b) = \{x \in R \mid a < x < b\}$ که با $]a, b[$ هم نشان داده می‌شود؛ خود a و b به آن تعلق ندارند و روی محور با دایرهٔ توخالی رسم می‌شوند.
  - **بازهٔ نیم‌باز:** $(a, b] = \{x \in R \mid a < x \le b\}$ و $[a, b) = \{x \in R \mid a \le x < b\}$.
- علامت‌های $+\infty$ و $-\infty$ عدد حقیقی نیستند و خواص اعداد حقیقی را ندارند؛ پس $(a, +\infty) = \{x \in R \mid x > a\}$، $(-\infty, b) = \{x \in R \mid x < b\}$، $(-\infty, b] = \{x \in R \mid x \le b\}$، $[a, +\infty) = \{x \in R \mid x \ge a\}$ و $(-\infty, +\infty) = R$ است؛ a و b را نقاط انتهایی بازه می‌نامیم.
- مثال: مجموعهٔ جواب $۶ + ۵x < ۳x + ۲$: از آن $-۲x < ۴$ و سپس $x > -۲$ به دست می‌آید؛ چون همهٔ مرحله‌ها برگشت‌پذیرند، جواب بازهٔ $(-۲, +\infty)$ است.

اعمال جبری روی مجموعه‌ها

- میان نظریهٔ مجموعه‌ها و نظریهٔ اعداد حقیقی تشابهی هست؛ همان‌طور که روی اعداد چهار عمل اصلی داریم، روی مجموعه‌ها هم اعمال جبری مشابهی تعریف می‌شود.

اجتماع و اشتراک

- **اجتماع** دو مجموعه، مجموعهٔ عضوهایی است که دست‌کم به یکی از آن دو تعلق دارند: $A \cup B = \{x \mid x \in A$ یا $x \in B\}$؛ مثلاً برای $A = \{a, b\}$ و $B = \{a, c, d, e\}$ داریم $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$.
- **اشتراک** دو مجموعه، مجموعهٔ عضوهایی است که به هر دو تعلق دارند: $A \cap B = \{x \mid x \in A, x \in B\}$؛ برای $A = \{۱, ۲, ۳, ۷\}$ و $B = \{۰, ۲, ۴, ۷\}$ داریم $A \cap B = \{۲, ۷\}$.
- اگر A خوانندگان روزنامهٔ کیهان و B خوانندگان اطلاعات باشد، $A \cup B$ کسانی‌اند که دست‌کم یکی از دو روزنامه را می‌خوانند و $A \cap B$ کسانی که هر دو را.

قوانین اجتماع و اشتراک

- برای هر سه مجموعهٔ A، B، C و مجموعهٔ جهانی U:

- اجتماع: $A \cup \phi = A$، $A \cup A = A$، $B \cup A = A \cup B$، $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$، $A \subseteq A \cup B$ و $B \subseteq A \cup B$، و $A \cup U = U$.
- اشتراک: $A \cap \phi = \phi$، $A \cap A = A$، $A \cap B = B \cap A$، $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$، $A \cap B \subseteq A$ و $A \cap B \subseteq B$، و $A \cap U = A$.

- به کمک خاصیت شرکت‌پذیری می‌توان پرانتزها را حذف کرد و نوشت $A \cup B \cup C$ و $A \cap B \cap C$؛ همچنین همیشه $A \cap B \subseteq A \cup B$.
- **قوانین پخشی:** $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ و $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

⚠ **دقت کنید: برای این گروه از کدها (مثل 1111001، 1111002، 1111012 و هم‌گروه‌ها) اثبات قضیه‌ها و تمرین‌های «ثابت کنید» فصل اول حذف است، ولی رابطه‌ای که در صورت تمرین خواسته شده جزو درس است؛ پس خود این قوانین را حفظ کنید، نه برهانشان را.**

نمودار ون و مجموعه‌های جدا

- برای روشن شدن رابطهٔ مجموعه‌ها از **نمودار ون** (Venn) استفاده می‌شود که در آن ناحیهٔ سایه‌خورده مجموعهٔ موردنظر را نشان می‌دهد.
- دو مجموعه **از هم جدا**ند اگر عضو مشترک نداشته باشند، یعنی $A \cap B = \phi$؛ مثل اعداد صحیح فرد و زوج، یا دانشجویان کمتر از ۲۵ سال و بیشتر از ۳۰ سال، یا $A = [1, 3]$ و $B = (3, 7)$.

تفاضل و متمم

- **تفاضل** B از A: $A - B = \{x \mid x \in A, x \notin B\}$؛ برای $A = \{1, 5, 7, 41\}$ و $B = \{3, 7, 12, 25\}$ داریم $A - B = \{1, 5, 41\}$ و $B - A = \{3, 12, 25\}$.
- در مثال روزنامه‌ها، $A - B$ کسانی‌اند که کیهان را می‌خوانند ولی اطلاعات را نه.
- **متمم** A نسبت به مجموعهٔ جهانی: $A' = U - A = \{x \mid x \in U, x \notin A\}$؛ اگر U اعداد حقیقی، A اعداد گنگ (اصم) و B اعداد گویا باشد، $A' = B$ و $B' = A$.
- **قضیه:** $\phi' = U$، $U' = \phi$، $(A')' = A$ و اگر $A \subseteq B$ آنگاه $B' \subseteq A'$ و برعکس.

⚠ **دقت کنید: تفاضل مجموعه‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد و در حالت کلی $A - B \neq B - A$.**

قوانین دمورگان

قوانین دمورگان (De Morgan): $(A \cup B)' = A' \cap B'$ و $(A \cap B)' = A' \cup B'$؛ این دو قانون برای تعداد متناهی مجموعه هم برقرارند: $(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n)' = A'_1 \cap A'_2 \cap \dots \cap A'_n$ و $(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)' = A'_1 \cup A'_2 \cup \dots \cup A'_n$. 💡

- مثال: اگر U همهٔ افراد کشور، B معلمان، C کشاورزان و D دامداران باشند، معلمانی که هم کشاورز و هم دامدارند $B \cap C \cap D$ و معلمانی که نه کشاورزند و نه دامدار $B \cap C' \cap D'$ هستند.
- رابطهٔ پرکاربرد (تمرین کتاب): $A - B = A \cap B'$.

تفاضل متقارن

- **تفاضل متقارن** مجموعهٔ عضوهایی است که فقط به A یا فقط به B تعلق دارند: $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$؛ نام «متقارن» از همین است که برابر اجتماع دو تفاضل A - B و B - A است.
- مثال: برای $A = \{۲, ۳, ۴, ۵\}$ و $B = \{۱, ۲, ۶, ۷, ۸\}$ داریم $A - B = \{۳, ۴, ۵\}$، $B - A = \{۱, ۶, ۷, ۸\}$ و $A \Delta B = \{۱, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸\}$.
- روابط تمرین کتاب: $A \cup B = (A \Delta B) \cup (A \cap B)$ و مجموعه‌های $A \cap B$ و $A \Delta B$ از هم جدا هستند.

حاصل‌ضرب دکارتی مجموعه‌ها

- **زوج مرتب** (جفت مرتب) دوتایی (a, b) است که در آن ترتیب عناصر مطرح است؛ a مؤلفهٔ اول و b مؤلفهٔ دوم است.
- دو زوج مرتب (a, b) و (c, d) مساوی‌اند اگر و تنها اگر $a = c$ و $b = d$؛ نتیجه: $(a, b) = (b, a)$ اگر و تنها اگر $a = b$.
- مثال: زوج‌های $(a + b, -۲)$ و $(۴, a - b)$ وقتی مساوی‌اند که $a + b = ۴$ و $a - b = -۲$، یعنی $a = ۱$ و $b = ۳$.

> **حاصل‌ضرب دکارتی دو مجموعهٔ ناتهی: $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$؛ هر عضو $A \times B$ یک زوج مرتب است.**

- مثال: برای $A = \{۱, ۲, ۳\}$ و $B = \{g, h\}$ داریم $A \times B = \{(۱, g), (۱, h), (۲, g), (۲, h), (۳, g), (۳, h)\}$ و $B \times A = \{(g, ۱), (g, ۲), (g, ۳), (h, ۱), (h, ۲), (h, ۳)\}$؛ پس $A \times B$ و $B \times A$ لزوماً برابر نیستند.
- حاصل‌ضرب دکارتی A در خودش را با $A^۲$ نشان می‌دهیم؛ اگر A دارای n عضو باشد، $A^۲$ دارای $n \times n = n^۲$ عضو است.

تعداد عضوها و افراز یک مجموعه

- مجموعه‌ای که تعداد عضوهایش متناهی باشد **متناهی** (باپایان) و در غیر این صورت **نامتناهی** (بی‌پایان) است؛ مجموعهٔ تهی متناهی حساب می‌شود.
- نمونه‌ها: $\{۱, ۳, ۷, ۹, ۱۱\}$ و $\{x \in R \mid x^۲ - ۱ = ۰\}$ متناهی‌اند؛ $[۰, ۱]$، مجموعه‌های اعداد طبیعی، صحیح، گویا، گنگ و حقیقی و هر بازهٔ (a, b) با $a < b$ نامتناهی‌اند.
- تعداد عضوهای مجموعهٔ متناهی A را با $n(A)$ نشان می‌دهیم؛ مثلاً $n(\{a, b, c, d\}) = ۴$، $n(\phi) = ۰$ و برای $B = \{x \in R \mid x(x^۲ - ۱) = ۰\}$ داریم $n(B) = ۳$.