۱- انتگرال گیری به روش تغییر متغیر

در بعضی مواقع برای محاسبه $\int f(x)dx$ تابع اولیه $f(x)$ موجود است اما مستقیماً نمی‌توان آن را حساب کرد برای محاسبه آن، تابع را به صورت ساده‌تر تغییر شکل می‌دهیم و تابع اولیه این صورت ساده را محاسبه می‌کنیم. با فرض $x=\varphi(t)$ که در آن t یک متغیر جدید و φ تابع پیوسته و مشتق‌پذیر است خواهیم داشت:

$$dx=\varphi'(t)dt$$

$$\Rightarrow \int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\ \varphi'(t)dt$$

مثال: انتگرال $\int \frac{x^3}{x^4+1}dx$ را محاسبه کنید.

حل: تغییر متغیر $u=1+x^4$ را در نظر می‌گیریم داریم:

$$du=4x^3dx \Rightarrow \frac{1}{4}du=x^3dx$$

پس

$$\int \frac{x^3}{x^4+1}dx=\int \frac{1}{4}\frac{du}{u}=\frac{1}{4}\int \frac{du}{u}=\frac{1}{4}Lnu+c$$

$$\underline{\underline{u=1+x^4}}\ \frac{1}{4}Ln(1+x^4)+c$$

نکته: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx=Ln|f(x)|+c$

۲- انتگرال‌گیری به روش جز به جز

فرض کنید توابع u,v در بازه I پیوسته و مشتق‌پذیر باشند در این صورت داریم:

$$d(u.v)=u.dv+v.du$$

$$u.dv=d(u.v)-v.du$$

$$\int$$

$$\Rightarrow \int udv=\int d(u.v)-\int v.du$$

$$\Rightarrow \int udv=uv-\int v.du$$

مثال: انتگرال $\int xLnxdx$ را محاسبه کنید.

حل: عبارت $xLnxdx$ را در نظر می‌گیریم:

$Lnx=u \longrightarrow du=\frac{1}{x}dx$

$xdx=dv \longrightarrow v=\frac{x^2}{2}$

$\int udv=uv-\int vdu=\frac{x^2}{2}.Lnx-\frac{1}{2}\int x^2.\frac{1}{x}dx=\frac{1}{2}x^2.Lnx-\frac{1}{4}x^2+c$

$$\begin{cases} u=x \overset{\text{مشتق}}{\Rightarrow} du=dx \\ dv=Lnxdx \underset{\text{گیری}}{\overset{\text{انتگرال}}{\Rightarrow}} v=xLnx-x \end{cases}$$

$$\int xLnxdx \underset{dv=Lnxdx}{\overset{u=x}{=}} \int udv \overset{\int udv=uv-\int vdu}{=\!=\!=} x(xLnx-x)-\int (xLnx-x)dx$$

$$=x^2Lnx-x^2-\int xLnxdx+\int xdx$$

$$=x^2Lnx-x^2-\int xLnxdx+\frac{x^2}{2}+c$$

$$\Rightarrow \int xLnxdx=x^2Lnx-\frac{1}{2}x^2-\int xLnxdx+c$$

$$\Rightarrow 2\int xLnxdx=x^2Lnx-\frac{1}{2}x^2+c$$

$$\Rightarrow \int xLnxdx=\frac{1}{2}(x^2Lnx-\frac{1}{2}x^2+c)$$

$$\Rightarrow \int xLnxdx=\frac{1}{2}x^2Lnx-\frac{1}{4}x^2+\overbrace{\frac{1}{2}c}^{c'}$$

$$\Rightarrow \int xLnxdx=\frac{1}{2}x^2Lnx-\frac{1}{4}x^2+c'$$

۳- انتگرال‌گیری به روش مثلثاتی:

۳- انتگرال‌گیری به روش مثلثاتی: اگر انتگرال شامل عبارتی به صورت یکی از حالت‌های زیر باشد با تغییر متغیر آن را به انتگرالی که شامل توابع مثلثاتی است تبدیل می‌کنیم.

حالت اول:

انتگرال شامل عبارت $\sqrt{a^2-b^2u^2}$ باشد در این صورت:

تغییر متغیر: $u=\frac{a}{b}\sin\theta$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2-b^2u^2}=\sqrt{a^2-b^2(\frac{a}{b}\sin\theta)^2}=\sqrt{a^2-a^2\sin^2\theta}$$

$$=a\sqrt{1-\sin^2\theta}=a\cos\theta \qquad \frac{-\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

حالت دوم:

انتگرال شامل عبارت $\sqrt{a^2+b^2u^2}$ باشد در این صورت:

تغییر متغیر: $u=\frac{a}{b}\tan\theta$

$u=\frac{a}{b}\tan\theta$:تغییر متغیر

$$\Rightarrow \sqrt{a^۲+b^۲u^۲}=\sqrt{a^۲+b^۲(\frac{a}{b}\tan\theta)^۲}=\sqrt{a^۲+a^۲\tan^۲\theta}$$

$$=a\sqrt{۱+\tan^۲\theta}=a\sqrt{\sec^۲\theta}=a\sec\theta \qquad -\frac{\pi}{۲}<\theta<\frac{\pi}{۲}$$

حالت سوم:

انتگرال شامل عبارت $\sqrt{b^۲u^۲-a^۲}$ باشد در این صورت:

تغییر متغیر : $u=\frac{a}{b}\sec\theta$

$$\Rightarrow \sqrt{b^۲u^۲-a^۲}=\sqrt{b^۲(\frac{a}{b}\sec\theta)^۲-a^۲}=\sqrt{a^۲\sec^۲\theta-a^۲}$$

$$=a\sqrt{\sec^۲\theta-۱}=a\sqrt{\tan^۲\theta}=a\tan\theta$$

که در آن $۰\leq\theta<\frac{\pi}{۲}$ و $-\pi<\theta\leq-\frac{\pi}{۲}$ می‌باشد.

مثال برای حالت اول: انتگرال $\int\sqrt{۲۵-x^۲}\,dx$ را محاسبه کنید.

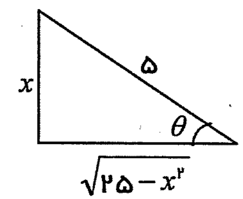
حل: داریم $a=۵$, $b=۱$ پس $x=\frac{۵}{۱}\sin\theta=۵\sin\theta$

$$dx=۵\cos\theta d\theta$$

$$\int\sqrt{۲۵-x^۲}\,dx=\int\sqrt{۲۵-۲۵\sin^۲\theta}(۵\cos\theta)d\theta$$

$$=\int ۲۵\sqrt{۱-\sin^۲\theta}\cos\theta d\theta=۲۵\int\cos^۲\theta d\theta$$

$$=۲۵\int\frac{۱+\cos۲\theta}{۲}d\theta=\frac{۲۵}{۲}\theta+\frac{۲۵}{۴}\sin۲\theta+c$$



حال چون $x=۵\sin\theta$ **است پس** $\theta=Arc\sin\frac{x}{۵}$

همچنین

$$\sin۲\theta=۲\sin\theta\cos\theta=۲\times\frac{x}{۵}\times\frac{\sqrt{۲۵-x^۲}}{۵}=\frac{۲x\sqrt{۲۵-x^۲}}{۲۵}$$

$$\Rightarrow\int\sqrt{۲۵-x^۲}\,dx=\frac{۲۵}{۲}Arc\sin\frac{x}{۵}+\frac{۲۵}{۴}.\frac{۲x\sqrt{۲۵-x^۲}}{۲۵}+c$$

$$=\frac{۲۵}{۲}Arc\sin\frac{x}{۵}+\frac{۱}{۲}.x\sqrt{۲۵-x^۲}+c$$

مثال برای حالت دوم:

مطلوبست محاسبه انتگرال $\int\frac{dx}{x^۲\sqrt{۲۵+x^۲}}$

حل:

$$\begin{cases}a=۵\\ b=۱\end{cases}\Rightarrow x=\frac{a}{b}\tan\theta=\frac{۵}{۱}\tan\theta=۵\tan\theta$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=۵\tan\theta\\ dx=۵\sec^۲\theta\end{cases}$$

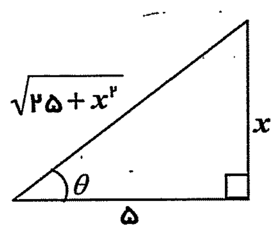
$$\int\frac{dx}{x^۲\sqrt{۲۵+x^۲}}=\int\frac{۵\sec^۲\theta}{۲۵\tan^۲\theta\sqrt{۲۵+۲۵\tan^۲\theta}}=\frac{۱}{۲۵}\int\frac{\sec^۲\theta}{\tan^۲\theta.\sec}.d\theta$$

$$=\frac{۱}{۲۵}\int\frac{\sec\theta}{\tan^۲\theta}d\theta=\frac{۱}{۲۵}\int\frac{\frac{۱}{\cos\theta}}{\frac{\sin^۲\theta}{\cos^۲\theta}}d\theta=\frac{۱}{۲۵}\int\frac{\cos\theta}{\sin^۲\theta}d\theta$$

$$\underset{du=\cos\theta d\theta}{\overset{u=\sin\theta}{=}}\frac{۱}{۲۵}\int u^{-۲}du=\frac{۱}{۲۵}\frac{u^{-۱}}{-۱}+c$$

$$=\frac{-۱}{۲۵}.\frac{۱}{u}+c\overset{u=\sin\theta}{=}\frac{-۱}{۲۵\sin\theta}+c$$

اما برای محاسبه $\sin\theta$ **داریم:**



$$\sin\theta=\frac{x}{\sqrt{۲۵+x^۲}}$$

$$\Rightarrow\int\frac{dx}{x^۲\sqrt{۲۵+x^۲}}=-\frac{۱}{۲۵\times\frac{x}{\sqrt{۲۵+x^۲}}}+c$$

$$=-\frac{\sqrt{۲۵+x^۲}}{۲۵x}+c$$

$u=\frac{a}{b}\tan\theta$:تغییر متغیر

$$\Rightarrow \sqrt{a^۲+b^۲u^۲}=\sqrt{a^۲+b^۲(\frac{a}{b}\tan\theta)^۲}=\sqrt{a^۲+a^۲\tan^۲\theta}$$

$$=a\sqrt{۱+\tan^۲\theta}=a\sqrt{\sec^۲\theta}=a\sec\theta \qquad -\frac{\pi}{۲}<\theta<\frac{\pi}{۲}$$

حالت سوم:

انتگرال شامل عبارت $\sqrt{b^۲u^۲-a^۲}$ باشد در این صورت:

$u=\frac{a}{b}\sec\theta$: تغییر متغیر

$$\Rightarrow\sqrt{b^۲u^۲-a^۲}=\sqrt{b^۲(\frac{a}{b}\sec\theta)^۲-a^۲}=\sqrt{a^۲\sec^۲\theta-a^۲}$$

$$=a\sqrt{\sec^۲\theta-۱}=a\sqrt{\tan^۲\theta}=a\tan\theta$$

که در آن $\circ\le\theta<\frac{\pi}{۲}$ و $-\pi<\theta\le-\frac{\pi}{۲}$ می‌باشد.

مثال برای حالت اول: انتگرال $\int\sqrt{۲۵-x^۲}\,dx$ را محاسبه کنید.

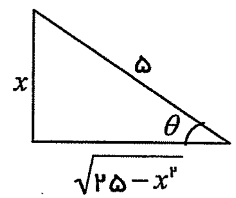
حل: داریم $a=۵$, $b=۱$ پس $x=\frac{۵}{۱}\sin\theta=۵\sin\theta$

$dx=۵\cos\theta d\theta$

$$\int\sqrt{۲۵-x^۲}\,dx=\int\sqrt{۲۵-۲۵\sin^۲\theta}\,(۵\cos\theta)d\theta$$

$$=\int ۲۵\sqrt{۱-\sin^۲\theta}\cos\theta d\theta=۲۵\int\cos^۲\theta d\theta$$

$$=۲۵\int\frac{۱+\cos۲\theta}{۲}d\theta=\frac{۲۵}{۲}\theta+\frac{۲۵}{۴}\sin۲\theta+c$$



حال چون $x=۵\sin\theta$ است پس $\theta=Arc\sin\frac{x}{۵}$

همچنین

$$\sin۲\theta=۲\sin\theta\cos\theta=۲\times\frac{x}{۵}\times\frac{\sqrt{۲۵-x^۲}}{۵}=\frac{۲x\sqrt{۲۵-x^۲}}{۲۵}$$

$$\Rightarrow\int\sqrt{۲۵-x^۲}\,dx=\frac{۲۵}{۲}Arc\sin\frac{x}{۵}+\frac{۲۵}{۴}.\frac{۲x\sqrt{۲۵-x^۲}}{۲۵}+c$$

$$=\frac{۲۵}{۲}Arc\sin\frac{x}{۵}+\frac{۱}{۲}.x\sqrt{۲۵-x^۲}+c$$

مثال برای حالت دوم:

مطلوبست محاسبه انتگرال $\int\frac{dx}{x^۲\sqrt{۲۵+x^۲}}$

حل:

$$\begin{cases}a=۵\\b=۱\end{cases}\Rightarrow x=\frac{a}{b}\tan\theta=\frac{۵}{۱}\tan\theta=۵\tan\theta$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=۵\tan\theta\\dx=۵\sec^۲\theta\end{cases}$$

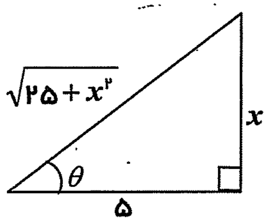
$$\int\frac{dx}{x^۲\sqrt{۲۵+x^۲}}=\int\frac{۵\sec^۲\theta}{۲۵\tan^۲\theta\sqrt{۲۵+۲۵\tan^۲\theta}}=\frac{۱}{۲۵}\int\frac{\sec^۲\theta}{\tan^۲\theta.\sec}.d\theta$$

$$=\frac{۱}{۲۵}\int\frac{\sec\theta}{\tan^۲\theta}d\theta=\frac{۱}{۲۵}\int\frac{\frac{۱}{\cos\theta}}{\frac{\sin^۲\theta}{\cos^۲\theta}}d\theta=\frac{۱}{۲۵}\int\frac{\cos\theta}{\sin^۲\theta}d\theta$$

$$\underset{du=\cos\theta d\theta}{\overset{u=\sin\theta}{=}}\frac{۱}{۲۵}\int u^{-۲}du=\frac{۱}{۲۵}\frac{u^{-۱}}{-۱}+c$$

$$=\frac{-۱}{۲۵}.\frac{۱}{u}+c\overset{u=\sin\theta}{=}\frac{-۱}{۲۵\sin\theta}+c$$

اما برای محاسبه $\sin\theta$ داریم:



$$\sin\theta=\frac{x}{\sqrt{۲۵+x^۲}}$$

$$\Rightarrow\int\frac{dx}{x^۲\sqrt{۲۵+x^۲}}=-\frac{۱}{۲۵\times\frac{x}{\sqrt{۲۵+x^۲}}}+c$$

$$=-\frac{\sqrt{۲۵+x^۲}}{۲۵x}+c$$

مثال برای حالت سوم:

مطلوبست محاسبه $\int \frac{\sqrt{x^۲-۴}}{x}dx$

حل:

$$\begin{cases} a=۲ \\ b=۱ \end{cases} \Rightarrow x=\frac{۲}{۱}\sec\theta=۲\sec\theta$$

$$\begin{cases} x=۲\sec\theta \\ dx=۲\sec\theta.\tan\theta d\theta \end{cases}$$

$$\int \frac{\sqrt{x^۲-۴}}{x}dx=\int \frac{\sqrt{۴\sec^۲\theta-۴}}{۲\sec\theta}.(۲\sec\theta.\tan\theta)d\theta$$

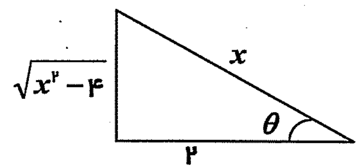
$$=۴\int \frac{\sqrt{\sec^۲\theta-۱}}{۲\sec\theta}(\sec\theta)\tan\theta d\theta$$

$$=۲\int \tan^۲\theta d\theta$$

$$=۲\int(\tan^۲\theta+۱-۱)d\theta=۲\int(\tan^۲\theta+۱)d\theta-\int ۲d\theta$$

$$=۲\tan\theta-۲\theta+c$$

از طرفی چون $x=۲\sec\theta$ داریم $\theta=Arc\sec\frac{x}{۲}$ و $\tan\theta=\frac{\sqrt{x^۲-۴}}{۲}$



لذا

$$\int \frac{\sqrt{x^۲-۴}}{x}dx=۲\times\frac{\sqrt{x^۲-۴}}{۲}-۲Arc\sec\frac{x}{۲}+c$$

$$\Rightarrow \int \frac{\sqrt{x^۲-۴}}{x}dx=\sqrt{x^۲-۴}-۲Arc\sec\frac{x}{۲}+c$$

۴- انتگرال‌گیری به روش کسرهای ساده:

تعریف: اگر $q(x),p(x)$ چندجمله‌ایهای از x باشند آنگاه کسر $\frac{p(x)}{q(x)}$ را یک کسر گویا گوییم.

تعریف: منظور از تجزیه کسرگویا آن است که آن را به صورت حاصل جمع کسرهایی به صورت زیر نشان دهیم:

۱) $\frac{A}{(x-a)^n}$

۲) $\frac{Ax+B}{(x^۲+ax+b)^m}$ $\quad m\geq ۱$

برای محاسبه انتگرال‌هایی به فرم $\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$ که در آن $q(x),p(x)$ چند جمله‌ای هستند حالت‌های مختلفی داریم:

حالت اول: درجه $p(x)$ مساوی یا بیشتر از درجه $q(x)$ است در این صورت $p(x)$ را بر $q(x)$ تقسیم می‌کنیم و آن را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\frac{p(x)}{q(x)}=h(x)+\frac{r(x)}{q(x)}$$

که در آن درجه $r(x)$ از درجه $q(x)$ کمتر است.

حالت دوم: درجه $p(x)$ کمتر از درجه $q(x)$ است. در این صورت $\frac{p(x)}{q(x)}$ را به مجموع چند کسر ساده تبدیل می‌کنیم.

۱- فرض کنیم α یک ریشه حقیقی مرتبه kام مخرج باشد یعنی $q(x)=(x-\alpha)^k q_۱(x)$ که در آن $q_۱(x)$ بر $(x-\alpha)$ قابل قسمت نیست آنگاه کسر $\frac{p(x)}{q(x)}$ را می‌توان به صورت مجموع کسرهای ساده زیر نوشت:

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{A_۱}{(x-\alpha)^k}+\frac{A_۲}{(x-\alpha)^{k-۱}}+...+\frac{A_k}{(x-\alpha)}+\frac{p_k(x)}{q_k(x)}$$

$\frac{p_k(x)}{q_k(x)}$ کسرگویا و تحول ناپذیر است.

۲- اگر کسر به صورت $\frac{p(x)}{(x-\alpha)^k(x^۲+bx+c)^n}$ باشددر این صورت تجزیه به صورت زیر خواهد بود.

$$\frac{p(x)}{(x-\alpha)^k(x^2+bx+c)^n}=\frac{A_1}{(x-\alpha)^k}+\frac{A_2}{(x-\alpha)^{k-1}}+\dots+\frac{A_k}{(x-\alpha)}+\dots$$
$$\frac{M_1x+N_1}{(x^2+bx+c)^n}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+bx+c)^{n-1}}+\dots+\frac{M_nx+N_n}{(x^2+bx+c)}$$

۳- اگر کسر به صورت $\frac{1}{x^2+ax+b}$ باشد که در آن $x^2+ax+b=0$ ریشه حقیقی ندارد برای محاسبه انتگرال آن، به جمله‌ای مخرج را به صورت مجموع یا تفاضل دو مربع کامل درمی‌آوریم.

۴- برای محاسبه $\int\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$ (که در آن مخرج ریشه حقیقی ندارد) مشتق مخرج را در صورت ظاهر می‌کنیم برای این منظور عدد $\frac{Ab}{2a}$ به صورت کسر اضافه و کم می‌کنیم سپس کسر را تفکیک کرده و انتگرال دو کسر بدست آمده را محاسبه می‌کنیم.

مثال: مطلوبست محاسبه $\int\frac{dx}{x^2-5x+6}$

حل:

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$$
$$\int\frac{dx}{x^2-5x+6}=\int\frac{dx}{(x-2)(x-3)}$$

ابتدا $\frac{1}{(x-2)(x-3)}$ را تجزیه می‌کنیم.

$$\frac{1}{(x-2)(x-3)}=\frac{A}{(x-2)}+\frac{B}{(x-3)}$$
$$\Rightarrow\frac{1}{(x-2)(x-3)}=\frac{(A+B)x-3A-2B}{(x-2)(x-3)}\Rightarrow(A+B)x-3A-2B=1$$
$$\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\Rightarrow A=-B\\-3A-2B=+1\overset{A=-B}{\Rightarrow}3B-2B=1\Rightarrow B=1\overset{A=-B}{\Rightarrow}A=-1\end{cases}$$
$$\Rightarrow\frac{1}{(x-2)(x-3)}=\frac{-1}{x-2}+\frac{1}{x-3}$$

لذا

$$\int\frac{dx}{x^2-5x+6}=\int\frac{dx}{(x-2)(x-3)}=\int\frac{-1}{(x-2)}dx+\int\frac{1}{(x-3)}dx$$
$$=-Ln|x-2|+Ln|x-3|+c$$

فصل اول
معادله دیفرانسیل مرتبه اول

- ✓ معادلات دیفرانسیل جداشدنی
- ✓ معادله دیفرانسیل همگن
- ✓ دسته منحنی ها و دسته منحنی های متعامد
- ✓ معادله دیفرانسیل کامل
- ✓ عامل انتگرال ساز
- ✓ معادله دیفرانسیل مرتبه اول خطی
- پاسخ تمرینات

$\int e^{x^2} = \frac{1}{2x}e^{x^2} \neq \int e^{x^2}$

$\int x e^{x^2}dx = \frac{1}{2}\int 2x e^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2}$

$\int e^{-4x} = -\frac{1}{4}e^{-4x}$

$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = Ln|\sqrt{1+x^2}+x|+c$