



فصل ششم: کاربردهای مشتق در مدیریت و اقتصاد

۱۴ تست آخر فصل

اولویت مطالعه: ضروری

صعودی و نزولی، نقطه بحرانی و اکسترمم نسبی

یکنوایی: اگر روی بازه‌ای $f'(x) > 0$ باشد، f آنجا صعودی است و اگر $f'(x) < 0$ ، نزولی. صفر شدن f' در چند نقطه تنها این حکم را عوض نمی‌کند: x^3 روی کل محور صعودی است.

نقطه بحرانی: نقطه c از دامنه که $f'(c) = 0$ یا $f'(c)$ وجود ندارد. اکسترمم نسبی فقط در نقطه بحرانی پیدا می‌شود، ولی هر نقطه بحرانی اکسترمم نیست.

f فرمول یا قاعده: آزمون مشتق اول

- ✓ اگر علامت f' در عبور از c از + به - برود، $f(c)$ ماکزیمم نسبی است.
- ✓ اگر علامت از - به + برود، $f(c)$ مینیمم نسبی است.
- ✓ اگر علامت عوض نشود (مثلاً در ریشه مضاعف f')، اکسترمم نیست.
- ✓ عرض نقطه از خود f حساب می‌شود، نه از f' .

مثال حل شده | اکسترمم‌های تابع درجه سه

✓ اکسترمم‌های نسبی $f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x + 5$ کدام‌اند؟

قدم به قدم

۱. مشتق و تجزیه: $f'(x) = 3x^2 - 6x - 24 = 3(x - 4)(x + 2)$ ؛ نقطه‌های بحرانی ۲- و ۴ است.

۲. علامت f' : پیش از ۲- مثبت، میان ۲- و ۴ منفی و بعد از ۴ مثبت.

۳. عرض‌ها از خود تابع: $f(-2) = 33$ و $f(4) = -75$.

جواب: ماکزیمم نسبی $(-2, 33)$ و مینیمم نسبی $(4, -75)$

الگوی حل: مشتق را تجزیه کن، علامتش را میان ریشه‌ها بخوان و عرض را از خود تابع بگیر.

نکته: ریشه مضاعف f' علامت را عوض نمی‌کند. در $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$ داریم $f'(x) = 12x(x - 1)^2$ ؛ پس فقط $x = 0$ مینیمم است و $x = 1$ اکسترمم نیست.

نکته: رأس سهمی $y = ax^2 + bx + c$ در $x = -\frac{b}{2a}$ است و مقدار آن $c - \frac{b^2}{4a}$ ؛ برای $a > 0$ مینیمم و برای $a < 0$ ماکزیمم.

نکته: تابع $ax^3 + bx^2 + cx + d$ با $a > 0$ وقتی روی کل محور صعودی است که $3ac \leq b^2$ (مبین f' نامثبت). تابع $kx + \sin x$ برای $k \geq 1$ همه‌جا صعودی است، چون $|\cos x| \leq 1$.

نکته: برای $k > 0$ تابع $x + \frac{k}{x}$ در $x = -\sqrt{k}$ ماکزیمم نسبی $2\sqrt{k}$ و در $x = \sqrt{k}$ مینیمم نسبی $-2\sqrt{k}$ دارد؛ مقدار ماکزیمم نسبی از مینیمم نسبی کمتر است.

نکته: وقتی نمودار f' داده شده، بالای محور یعنی f صعودی و پایین محور یعنی نزولی. جایی که نمودار f' محور را قطع می‌کند اکسترمم f است و جایی که فقط به محور می‌خورد، نه.





★ نکات مهم این مبحث

- ✓ $f' > 0$ یعنی صعودی و $f' < 0$ یعنی نزولی؛ صفر شدن در نقطه‌های تنها حکم را عوض نمی‌کند.
- ✓ تا علامت f' در نقطه عوض نشود اکسترمم نسبی نداریم؛ ریشه مضاعف کافی نیست.
- ✓ عرض اکسترمم از خود f حساب می‌شود؛ رأس سهمی در $x = -\frac{b}{2a}$ است.

۱۲ تست آخر فصل

اولویت مطالعه: ضروری

تقعر، نقطه عطف و آزمون مشتق دوم

تقعر: اگر روی بازه‌ای $f''(x) > 0$ باشد، تقعر نمودار رو به بالا (به طرف y های مثبت) است و اگر $f''(x) < 0$ ، رو به پایین.
نقطه عطف: جایی روی نمودار که تابع پیوسته است و جهت تقعر دو طرفش فرق می‌کند. نامزدهای عطف: صفرهای f'' و جاهایی از دامنه که f'' وجود ندارد؛ تغییر علامت f'' لازم است: x^4 در صفر عطف ندارد.

f فرمول یا قاعده: آزمون مشتق دوم

- ✓ اگر $f'(c) = 0$ و $f''(c) < 0$: ماکزیمم نسبی در c .
- ✓ اگر $f'(c) = 0$ و $f''(c) > 0$: مینیمم نسبی در c .
- ✓ اگر $f'(c) = f''(c) = 0$: این آزمون حکمی نمی‌دهد و آزمون مشتق اول لازم است.

مثال حل‌شده | اکسترمم و عطف یک تابع درجه سه

✓ برای $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$ نوع نقطه‌های بحرانی و نقطه عطف را پیدا کنید.

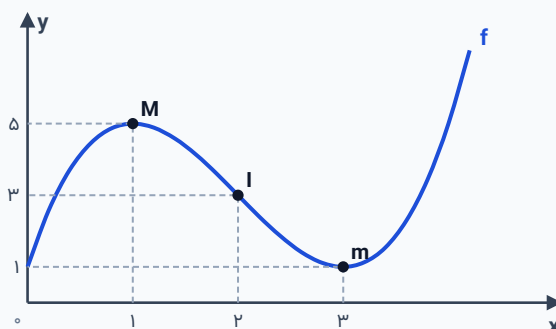
قدم به قدم

۱. $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$ و $f''(x) = 6x - 12$.
۲. آزمون مشتق دوم: $f''(1) = -6 < 0$ پس ماکزیمم $f(1) = 5$ ؛ $f''(3) = 6 > 0$ پس مینیمم $f(3) = 1$.
۳. عطف: f'' در $x = 2$ صفر می‌شود و علامتش از منفی به مثبت می‌رود؛ $f(2) = 3$.

جواب: ماکزیمم $(1, 5)$ ، مینیمم $(3, 1)$ و عطف $(2, 3)$

الگوی حل: علامت f'' در نقطه بحرانی نوع آن را می‌گوید و تغییر علامت f'' جای عطف را.

■ اکسترمم و عطف تابع درجه سه



نمودار $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$: عطف $(2, 3)$ وسط ماکزیمم $(1, 5)$ و مینیمم $(3, 1)$ است و نمودار نسبت به آن متقارن است؛ پیش از $x = 2$ تقعر رو به پایین و بعد از آن رو به بالاست.

نکته: تابع درجه سه $ax^3 + bx^2 + cx + d$ دقیقاً یک عطف در $x = -\frac{b}{3a}$ دارد که مرکز تقارن نمودار و وسط دو اکسترمم (اگر باشند) است.





نکته: ریشه مضاعف f'' عطف نمی‌سازد. نقطه عطف f جایی است که f' اکستریم دارد؛ پس اگر f' همه‌جا تعریف شده باشد و هیچ‌جا صفر نشود، f اکستریم ندارد ولی ممکن است عطف داشته باشد.

نکته: در توان‌های کسری با مخرج فرد، $x^{-\frac{m}{n}}$ برای m زوج همیشه مثبت و برای m فرد هم‌علامت x است؛ نقطه‌ای که f'' در آن تعریف نشده (مثل صفر) مرز جدول است. برای $\ln$ اول دامنه نوشته می‌شود.

★ نکات مهم این مبحث

- ✓ $f'' > 0$ تقعر رو به بالا و $f'' < 0$ تقعر رو به پایین است.
- ✓ عطف یعنی تغییر علامت f'' در نقطه‌ای از دامنه؛ صفر شدن f'' به‌تنهایی کافی نیست.
- ✓ درجه سه یک عطف در $x = -\frac{b}{3a}$ دارد، وسط دو اکستریم.

۷ تست آخر فصل

اولویت مطالعه: ضروری

اکستریم مطلق در بازه بسته

اکستریم مطلق: بیشترین یا کمترین مقداری که تابع روی همه نقطه‌های یک بازه می‌گیرد. اگر تابع روی $[a, b]$ پیوسته باشد، بیشینه و کمینه مطلق هر دو وجود دارند و هر کدام یا در یک نقطه بحرانی درونی است یا در a یا b .

f فرمول یا قاعده: روش بازه بسته

- ✓ ۱- نقطه‌های بحرانی درون (a, b) را پیدا کن؛ نقطه‌های بیرون بازه کنار می‌روند.
- ✓ ۲- مقدار f را در این نقطه‌ها و در a و b حساب کن.
- ✓ ۳- بزرگ‌ترین عدد بیشینه مطلق و کوچک‌ترین، کمینه مطلق است.
- ✓ بازه داده نشده و دامنه تابع بازه‌ای بسته است؟ همان دامنه بازه کار است؛ مثلاً $\sqrt{9-x^2}$ روی $[-3, 3]$.

مثال حل شده | سود با سقف ظرفیت

- ✓ سود هر ماه یک کارگاه $\pi(q) = -q^3 + 9q^2 + 48q - 100$ میلیون ریال است (q تولید هر ماه به صد واحد) و ظرفیت کارگاه $0 \leq q \leq 10$ است. بیشترین و کمترین سود کدام است؟

قدم به قدم

۱. $\pi'(q) = -3q^2 + 18q + 48 = -3(q-8)(q+2)$ ؛ فقط $q = 8$ درون بازه است.
۲. مقادیرها: $\pi(10) = 280$ و $\pi(8) = 348$ ، $\pi(0) = -100$.

جواب: بیشترین سود ۳۴۸ میلیون ریال در $q = 8$ و کمترین، زیان ۱۰۰ میلیون ریال در $q = 0$

الگوی حل: نامزدها را فهرست کن (بحرانی درون بازه و دو سر) و فقط مقادیر را مقایسه کن؛ جدول علامت لازم نیست.

مثال حل شده | جواب در سر بازه

- ✓ بیشینه و کمینه مطلق $f(x) = x^3 - 3x^2$ روی $[-1, 4]$ کدام است؟

قدم به قدم

۱. $f'(x) = 3x(x-2)$ ؛ نقطه‌های بحرانی ۰ و ۲ هر دو درون بازه‌اند.
۲. مقادیرها: $f(-1) = -4$ ، $f(0) = 0$ ، $f(2) = -4$ و $f(4) = 16$.

جواب: بیشینه مطلق ۱۶ در سر بازه و کمینه مطلق -۴ (در دو نقطه $x = 2$ و $x = -1$)

الگوی حل: همه نامزدها را حساب کن؛ کمینه یا بیشینه مطلق می‌تواند در سر بازه یا در بیش از یک نقطه باشد.





نکته: اگر نقطه بحرانی بیرون بازه باشد یا اصلاً نباشد، جواب در یکی از دو سر است. در تابع‌های رادیکالی دو سر دامنه هم نامزدند و ریشه‌ای که از به توان دو رساندن معادله $f' = 0$ آمده، باید در خود معادله واریسی شود.

★ نکات مهم این مبحث

- ✓ برای اکسترمم مطلق روی $[a, b]$ مقدار تابع در دو سر و در بحرانی‌های درونی مقایسه می‌شود.
- ✓ نقطه بحرانی بیرون بازه کنار می‌رود.
- ✓ بی بازه داده‌شده، اگر دامنه تابع بازه‌ای بسته باشد، همان بازه کار است.

۶ تست آخر فصل

اولویت مطالعه: مهم

قضیه رول و قضیه مقدار میانگین

f فرمول یا قاعده: قضیه رول

- ✓ شرط‌ها: f روی $[a, b]$ پیوسته، روی (a, b) مشتق‌پذیر و $f(a) = f(b)$.
- ✓ حکم: دست‌کم یک $c \in (a, b)$ هست که $f'(c) = 0$ (مماس افقی).

f فرمول یا قاعده: قضیه مقدار میانگین

- ✓ شرط‌ها: f روی $[a, b]$ پیوسته و روی (a, b) مشتق‌پذیر.
- ✓ حکم: دست‌کم یک $c \in (a, b)$ هست که $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ (مماس موازی وتر).

نمونه‌های نقض شرط

تابع و بازه	شرط برقرارنشده
$ x - 1 $ روی $[0, 2]$	مشتق‌پذیری در $x = 1$
$\frac{1}{x}$ روی $[-1, 1]$	پیوستگی در $x = 0$
x^2 روی $[0, 2]$	$f(a) = f(b)$ (فقط برای رول)

مثال حل‌شده | پیدا کردن c

- ✓ عدد c در قضیه مقدار میانگین برای $f(x) = x^3 - 3x$ روی $[0, 3]$ کدام است؟

قدم به قدم

۱. شرط‌ها برقرار است (چندجمله‌ای همه‌جا پیوسته و مشتق‌پذیر است).

$$۲. \text{ شیب وتر: } ۶ = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{۱۸ - ۰}{۳}$$

۳. $f'(c) = 3c^2 - 3 = ۶$ پس $c = \pm\sqrt{3}$ ؛ فقط $\sqrt{3}$ در $(0, 3)$ است.

جواب: $c = \sqrt{3}$

الگوی حل: شیب وتر را حساب کن، با $f'(c)$ برابر بگذار و فقط ریشه‌های درون بازه باز را نگه دار.

نکته: برای هر تابع درجه دوم، c مقدار میانگین همیشه وسط بازه، $\frac{a+b}{2}$ ، است. نمونه کاربردی: اگر $C(q) = q^2 + 10q + 400$ ، آهنگ متوسط هزینه از $q = 10$ تا $q = 30$ برابر ۵۰ است و هزینه نهایی $10 + 2q$ در $q = 20$ همین ۵۰ می‌شود.

نکته: از قضیه رول: میان هر دو ریشه یک تابع مشتق‌پذیر، f' دست‌کم یک ریشه دارد؛ پس تابع مشتق‌پذیری که f' آن روی یک بازه ریشه ندارد، در آن بازه حداکثر یک ریشه دارد.





★ نکات مهم این مبحث

- ✓ رول سه شرط دارد: پیوستگی روی بازه بسته، مشتق پذیری روی بازه باز و $f(a) = f(b)$.
- ✓ مقدار میانگین: شیب مماس در نقطه‌ای درون بازه برابر شیب وتر است.
- ✓ برای تابع درجه دوم، c وسط بازه است.

۹ تست آخر فصل

اولویت مطالعه: مهم

قاعده هوپیتال

قاعده هوپیتال: اگر $\frac{f(x)}{g(x)}$ وقتی $x \rightarrow a$ (یا $x \rightarrow \pm\infty$) به شکل $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ باشد، f و g نزدیک a مشتق پذیر باشند و $g'(x) \neq 0$ ، حد کسر با حد $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ برابر است، به شرط اینکه حد دوم وجود داشته باشد (عدد یا $\pm\infty$).

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

تبدیل حالت‌های مبهم دیگر

تبدیل	حالت
$fg = \frac{f}{1/g}$ و سپس هوپیتال	$0 \cdot \infty$
مخرج مشترک یا ضرب در مزدوج	$\infty - \infty$
$\lim f^g = e^{\lim g(f-1)}$	1^∞
$\lim f^g = e^{\lim g \ln f}$	∞^0 و 0^∞

مثال حل شده | هوپیتال دو بار

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1 - 2x}{x^2} \quad \checkmark$$

کدام است؟

قدم به قدم

۱. در $x = 0$ صورت و مخرج صفرند؛ حالت $\frac{0}{0}$.
۲. یک بار: $\frac{2e^{2x} - 2}{2x}$ که باز $\frac{0}{0}$ است.
۳. بار دوم: $\frac{4e^{2x}}{2} \rightarrow 2$.

جواب: ۲

الگوی حل: پیش از هر بار مشتق‌گیری مبهم بودن را واریسی کن و صورت و مخرج را جدا مشتق بگیر.

مثال حل شده | حالت یک به توان بی‌نهایت

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{2x} \quad \checkmark$$

کدام است؟

قدم به قدم

۱. پایه به ۱ و توان به $+\infty$ می‌رود؛ حالت 1^∞ .
۲. $\lim g(f-1) = \lim 2x \cdot \frac{3}{x} = 6$.

جواب: e^6

الگوی حل: در حالت یک به توان بی‌نهایت، حاصل e به توان حد «توان ضرب در پایه منهای یک» است.



نکته: وقتی $x \rightarrow +\infty$ و $n > 0$ و $\ln x$ از x^n و e^x کندتر رشد می کند؛ پس $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$. همچنین $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$.

نکته: قاعده فقط برای $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ است. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \cos x}{x + 2}$ مبهم نیست و جوابش $\frac{1}{2}$ است، ولی هویپیتال نابجا عدد ۱ می دهد.

★ نکات مهم این مبحث

- ✓ هویپیتال فقط در $\frac{0}{0}$ و $\frac{\infty}{\infty}$ ؛ صورت و مخرج جدا مشتق گرفته می شوند.
- ✓ حالت 1^∞ : حاصل $e^{\lim (f-1)}$ است.
- ✓ در بی نهایت، e^x از هر توان مثبت x و هر توان مثبت $\ln x$ از $\ln x$ تندتر رشد می کند.

رسم نمودار تابع | اولویت مطالعه: تکمیلی ۷ تست آخر فصل

- ۱- دامنه و تقارن: تابع زوج ($f(-x) = f(x)$) نسبت به محور y ها و تابع فرد ($f(-x) = -f(x)$) نسبت به مبدأ متقارن است.
- ۲- مجانب ها (جدول پایین)؛ سپس با f' یکنوایی و اکسترمم و با f'' تقعر و عطف.
- ۳- جدول تغییرات و چند نقطه کمکی، مثل برخورد با محورها.

مجانب ها

مجانب	شرط
قائم $x = a$	دست کم یک حد یک طرفه در a بی نهایت؛ در کسر گویای ساده شده، ریشه مخرج
افقی $y = b$	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$
مایل $y = mx + h$	$h = \lim (f(x) - mx)$ و $m = \lim \frac{f(x)}{x}$

نکته: در کسر گویا اگر درجه صورت از مخرج کمتر باشد، مجانب افقی $y = 0$ است؛ اگر برابر، نسبت ضریب های بزرگ ترین توان؛ اگر یکی بیشتر، مجانب مایل همان خارج قسمت تقسیم است. نمودار $\frac{ax+b}{cx+d}$ (با $c \neq 0$ و $ad - bc \neq 0$) مجانب های $x = -\frac{d}{c}$ و $y = \frac{a}{c}$ دارد و محل برخورد آن ها مرکز تقارن است.

مثال حل شده | بررسی کامل یک کسر گویا

✓ نمودار $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$ را بررسی کنید.

قدم به قدم

۱. دامنه $x \neq 1$ ؛ مجانب قائم $x = 1$.
۲. تقسیم: $\frac{x^2 + 3}{x - 1} = x + 1 + \frac{4}{x - 1}$ ؛ مجانب مایل $y = x + 1$.
۳. $f'(x) = \frac{(x+1)(x-3)}{(x-1)^2}$ ؛ ماکزیمم نسبی $f(-1) = -2$ و مینیمم نسبی $f(3) = 6$.
۴. $f''(x) = \frac{8}{(x-1)^3}$ ؛ تقعر برای $x < 1$ رو به پایین و برای $x > 1$ رو به بالا؛ عطف ندارد.

جواب: جدول تغییرات پایین

الگوی حل: دامنه، مجانب، f' و f'' را به ترتیب حساب کن و همه را در یک جدول کنار هم بگذار.





جدول تغییرات $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$

x	$x < -1$	-1	$-1 < x < 1$	$1 < x < 3$	3	$x > 3$
f'	+	۰	-	-	۰	+
f	صعودی	ماکزیمم -۲	نزولی	نزولی	مینیمم ۶	صعودی

★ نکات مهم این مبحث

- ✓ مجانب قائم از ریشه مخرج ساده‌شده و مجانب افقی از حد در بی‌نهایت به دست می‌آید.
- ✓ وقتی درجه صورت یکی بیشتر از مخرج است، خارج‌قسمت تقسیم مجانب مایل است.
- ✓ مرکز تقارن $\frac{ax+b}{cx+d}$ نقطه $(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c})$ است.

کاربرد اقتصادی: نهایی، سود بیشینه و کشش | اولویت مطالعه: ضروری | ۱۷ تست آخر فصل

نمادها: $C(q)$ هزینه کل تولید q واحد، $R(q)$ درآمد کل، p قیمت هر واحد و $\pi(q)$ سود است.

هزینه، درآمد و سود

مفهوم	فرمول	معنا
هزینه میانگین	$AC = \frac{C(q)}{q}$	هزینه هر واحد
هزینه نهایی	$MC = C'(q)$	تقریب هزینه واحد بعدی
درآمد کل	$R(q) = pq$	قیمت ضرب در مقدار
درآمد نهایی	$MR = R'(q)$	تقریب درآمد واحد بعدی
سود	$\pi(q) = R(q) - C(q)$	سود نهایی $\pi' = MR - MC$

f فرمول یا قاعده: شرطهای بهینه

- ✓ بیشینه سود: $MR = MC$ (یعنی $\pi'(q) = 0$ و $\pi''(q) < 0$)، یعنی $R''(q) < C''(q)$.
- ✓ کمینه هزینه میانگین: $AC'(q) = 0$ که هم‌ارز $MC = AC$ است.
- ✓ در هزینه درجه سه با ضریب q^3 مثبت، MC در نقطه عطف $C(q)$ کمینه است ($C'''(q) = 0$).

مثال حل‌شده | بیشینه سود

- ✓ تقاضای یک دستگاه $2q - 300 = p$ است (p میلیون ریال برای هر دستگاه) و هزینه کل $C(q) = q^2 + 60q + 1000$ میلیون ریال. تولید، قیمت و سود بهینه کدام است؟

قدم به قدم

۱. $R(q) = 300q - 2q^2$ ، پس $MR = 300 - 4q$ و $MC = 2q + 60$.
۲. $MR = MC$: $300 - 4q = 2q + 60$ ، پس $q = 40$.
۳. شرط مرتبه دوم: $0 < -6 - 2 = \pi''(q)$ ؛ بیشینه است.
۴. $p = 300 - 80 = 220$ ؛ $R(40) = 1800$ و $C(40) = 5000$ ، پس $\pi(40) = 3800$.

جواب: ۴۰ دستگاه، قیمت ۲۲۰ و سود ۳٬۸۰۰ میلیون ریال

الگوی حل: درآمد را از قیمت ضرب در مقدار بساز، $MR = MC$ را حل کن، علامت π'' را بسنج و قیمت را از تابع تقاضا بخوان.



مثال حل شده | کمینه هزینه میانگین

✓ هزینه کل $C(q) = 2q^2 + 50q + 800$ میلیون ریال است. کمترین هزینه میانگین در چه تولیدی است؟

قدم به قدم

$$1. AC(q) = 2q + 50 + \frac{800}{q}$$

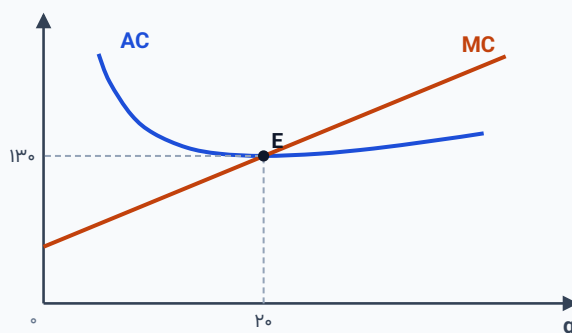
$$2. AC'(q) = 2 - \frac{800}{q^2} = 0 \text{ پس } q = 20 \text{ و } (AC'' > 0)$$

$$3. AC(20) = 130 \text{ و } MC(20) = 4 \times 20 + 50 = 130 \text{؛ برابرند.}$$

جواب: $q = 20$ و کمترین هزینه هر واحد ۱۳۰ میلیون ریال

الگوی حل: C را بر q تقسیم کن و مشتق بگیر، یا میانبر $MC = AC$ را حل کن.

■ هزینه میانگین و هزینه نهایی



برای $C(q) = 2q^2 + 50q + 800$ تا وقتی MC زیر AC است، AC پایین می‌آید؛ دو منحنی در کمینه AC ، یعنی $(20, 130)$ ، به هم می‌رسند.

کشش قیمتی تقاضا: $E_d = \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q}$ ، یعنی درصد تغییر مقدار تقاضا به ازای یک درصد افزایش قیمت. برای تقاضای معمولی منفی است و با قدرمطلقش دآوری می‌شود: $|E_d| > 1$ پرکشش، $|E_d| < 1$ کم‌کشش و $|E_d| = 1$ کشش واحد.

f فرمول یا قاعده: کشش و درآمد کل

$$MR = p \left(1 + \frac{1}{E_d} \right) \text{ و } \frac{dR}{dp} = q(1 + E_d) \quad \checkmark$$

✓ پرکشش ($|E_d| > 1$): افزایش قیمت درآمد کل را کم می‌کند.

✓ کم‌کشش ($|E_d| < 1$): افزایش قیمت درآمد کل را زیاد می‌کند.

✓ کشش واحد ($|E_d| = 1$): درآمد کل بیشینه است و $MR = 0$.

مثال حل شده | کشش و قیمت بهینه درآمد

✓ تقاضای هر ماه یک کالا $q = 120 - 2p$ واحد است (p قیمت هر واحد به میلیون ریال). کشش در $p = 40$ و قیمتی که درآمد

کل را بیشینه می‌کند کدام است؟

قدم به قدم

$$1. \text{ در } p = 40: q = 40 \text{ و } \frac{dq}{dp} = -2$$

$$2. E_d = -2 \times \frac{40}{40} = -2 \text{؛ پرکشش است، پس افزایش قیمت درآمد را کم می‌کند.}$$

$$3. \text{ درآمد بیشینه در } |E_d| = 1: \frac{2p}{120 - 2p} = 1 \text{؛ پس } p = 30$$





جواب: $E_d = -2$ و قیمت بهینه ۳۰ میلیون ریال

الگوی حل: $\frac{dq}{dp}$ را در $\frac{p}{q}$ همان نقطه ضرب کن؛ برای درآمد بیشینه $|E_d| = 1$ یا $\frac{dR}{dp} = 0$ را حل کن.

نکته: برای تقاضای خطی $p = a - bq$, $MR = a - 2bq$ است (شیب دو برابر) و درآمد در $q = \frac{a}{3b}$ بیشینه است. برای $q = kp^{-n}$ کشش در همه قیمت‌ها $-n$ است.

نکته: هزینه ثابت (جمله ثابت $C(q)$) در MC و در مقدار تولید بهینه سود اثری ندارد، ولی در AC و در مقدار سود اثر دارد.

★ نکات مهم این مبحث

- ✓ بیشینه سود در $MR = MC$ با شرط $\pi'' < 0$ است.
- ✓ هزینه میانگین جایی کمینه است که $MC = AC$.
- ✓ در تقاضای پرکشش افزایش قیمت درآمد کل را کم می‌کند؛ درآمد بیشینه در $|E_d| = 1$ است.

۹ تست آخر فصل

اولویت مطالعه: ضروری

مسئله‌های بهینه‌سازی

f فرمول یا قاعده: الگوی بهینه‌سازی

- ✓ ۱- متغیرها و کمیت هدف (سود، هزینه، مساحت) را نام بگذار.
- ✓ ۲- با قید یکی از متغیرها را حذف کن تا تابع یک‌متغیره شود و دامنه واقعی آن را بنویس.
- ✓ ۳- مشتق را صفر کن و با مشتق دوم یا مقایسه دو سر دامنه، بیشینه یا کمینه بودن را تأیید کن.
- ✓ ۴- همان چیزی را گزارش کن که خواسته شده (اندازه یا مقدار).

مثال حل‌شده | کمترین هزینه حصار

- ✓ انباری مستطیلی به مساحت ۸۰۰ متر مربع کنار یک دیوار ساخته می‌شود و ضلع کنار دیوار حصار نمی‌خواهد. هر متر حصار ۲ میلیون ریال است. کمترین هزینه حصار چند میلیون ریال است؟

قدم به قدم

۱. دو ضلع عمود بر دیوار x و ضلع موازی $\frac{800}{x}$ ؛ طول حصار $L(x) = 2x + \frac{800}{x}$.
۲. $L'(x) = 2 - \frac{800}{x^2} = 0$ پس $x = 20$ و $L''(20) > 0$.
۳. $L(20) = 40 + 40 = 80$. $80 \times 2 = 160$ متر؛ هزینه ۱۶۰.

جواب: ۱۶۰ میلیون ریال (ابعاد ۲۰ در ۴۰ متر)

الگوی حل: قید را برای حذف یک متغیر به کار ببر، تابع هدف را مشتق بگیر و ضریب هزینه را آخر ضرب کن.

اندازه سفارش اقتصادی: تقاضای سالانه D واحد، هزینه هر بار سفارش K و هزینه نگهداری هر واحد در سال h است. با سفارش‌های Q تایی، هزینه سالانه $TC(Q) = \frac{D}{Q}K + \frac{Q}{2}h$ است و کمینه آن در اندازه زیر.

$$Q^* = \sqrt{\frac{2DK}{h}}$$





مثال حل شده | اندازه سفارش اقتصادی

✓ فروشگاه سالانه ۳,۶۰۰ واحد کالا می‌فروشد؛ هزینه هر سفارش ۵ میلیون ریال و نگهداری هر واحد در سال ۰,۴ میلیون ریال است. اندازه بهینه سفارش و هزینه سالانه کدام است؟

قدم به قدم

$$1. Q^* = \sqrt{\frac{2 \times 3600 \times 5}{0.4}} = \sqrt{90000} = 300$$

۲. شمار سفارش در سال $\frac{3600}{300} = 12$ و هزینه سفارش $12 \times 5 = 60$

۳. هزینه نگهداری $60 = \frac{300}{2} \times 0.4$ ؛ جمع ۱۲۰.

جواب: ۳۰۰ واحد در هر سفارش و هزینه سالانه ۱۲۰ میلیون ریال

الگوی حل: در اندازه بهینه، هزینه سفارش و هزینه نگهداری برابرند؛ این برابری میانبر واری است.

نکته: اگر $a + b = S$ ثابت باشد، ab در $a = b = \frac{S}{2}$ بیشینه و برابر $\frac{S^2}{4}$ است؛ اگر $ab = k$ ثابت و $a, b > 0$ باشد، $a + b$ در $a = b = \sqrt{k}$ کمینه و برابر $2\sqrt{k}$ است.

نکته: از ورق مربعی به ضلع a با بریدن مربع‌هایی به ضلع x از چهار گوشه، جعبه در باز با حجم $V = x(a - 2x)^2$ ساخته می‌شود که در $x = \frac{a}{6}$ بیشینه است.

★ نکات مهم این مبحث

✓ با قید یک متغیر را حذف کن و تابع یک‌متغیره را بهینه کن.

✓ اندازه سفارش اقتصادی $\sqrt{\frac{2DK}{h}}$ است و آنجا هزینه سفارش و نگهداری برابرند.

✓ با مجموع ثابت S ، بیشترین حاصل ضرب $\frac{S^2}{4}$ است.





برگه جمع بندی فصل ششم کاربردهای مشتق، یک صفحه برای مرور شب آزمون

فرمول ها و قاعده ها

۱. آزمون مشتق اول: تغییر علامت f' از $+$ به $-$ ماکزیمم و از $-$ به $+$ مینیمم
۲. $f'(c) = 0$ و $f''(c) < 0$ ماکزیمم؛ $f'(c) = 0$ و $f''(c) > 0$ مینیمم
۳. رأس سهمی $x = -\frac{b}{2a}$ ؛ عطف درجه سه $x = -\frac{b}{3a}$
۴. مقدار میانگین: $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ با $c \in (a, b)$
۵. هوییتال: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f}{g} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'}{g'}$ ؛ حالت 1^∞ : $e^{\lim_{x \rightarrow \infty} g(f-1)}$
۶. مجانب مایل: $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ و $h = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx)$
۷. $\pi = R - C$ و $MR = R'(q)$ ، $MC = C'(q)$ ، $AC = \frac{C(q)}{q}$
۸. بیشینه سود: $MR = MC$ و $\pi'' < 0$ ؛ کمینه MC : $MC = AC$
۹. $MR = p \left(1 + \frac{1}{E_d}\right)$ و $E_d = \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q}$
۱۰. اندازه سفارش اقتصادی: $Q^* = \sqrt{\frac{2DK}{h}}$

تعریف های کلیدی

نقطه بحرانی	نقطه ای از دامنه که مشتق در آن صفر است یا وجود ندارد.
نقطه عطف	نقطه ای از نمودار پیوسته که تقعر در آن عوض می شود.
اکسترمم مطلق	بیشترین یا کمترین مقداری که تابع روی یک بازه می گیرد.
حالت مبهم	حدی به شکل $\frac{0}{0}$ ، $\frac{\infty}{\infty}$ ، $0 \cdot \infty$ ، $\infty - \infty$ یا توانی مثل 1^∞ .
مجانب	خطی که نمودار در بی نهایت یا نزدیک یک نقطه به آن نزدیک می شود.
هزینه نهایی	مشتق هزینه کل؛ تقریب هزینه تولید یک واحد بیشتر.
کشش قیمتی تقاضا	درصد تغییر مقدار تقاضا به ازای یک درصد تغییر قیمت.
اندازه سفارش اقتصادی	اندازه سفارشی که جمع هزینه سفارش و نگهداری سالانه را کمینه می کند.

دام های تستی

۱ طول به جای مقدار

طراح تست طول نقطه اکسترمم یا مقدار مشتق را کنار مقدار تابع در گزینه ها می گذارد. **مواظب باشید:** مقدار اکسترمم همان **عرض نقطه** است که از **خود تابع** حساب می شود. ص ۱۰۹

۲ صفر شدن بی تغییر علامت

طراح تست تابعی با ریشه مضاعف f' یا f'' می دهد تا آن را اکسترمم یا عطف بشماری. **مواظب باشید:** اکسترمم و عطف فقط با **تغییر علامت** ساخته می شوند؛ عامل با **توان زوج** علامت را عوض نمی کند. ص ۱۰۹

۳ سر بازه

طراح تست مقدار نقطه بحرانی را در گزینه ها می گذارد در حالی که اکسترمم مطلق در سر بازه است یا نقطه بحرانی بیرون بازه است. **مواظب باشید:** مقدار **دو سر بازه** با مقدار نقطه های بحرانی **درون بازه** مقایسه می شود. ص ۱۱۱

۴ هوییتال نابجا

طراح تست حدی می دهد که مبهم نیست تا با هوییتال عدد دیگری به دست آید. **مواظب باشید:** قاعده فقط در دو حالت **صفر بر صفر** و **بی نهایت بر بی نهایت** به کار می رود و صورت و مخرج **جدا** مشتق گرفته می شوند. ص ۱۱۴

۵ شرط مرتبه دوم سود

طراح تست تابعی می دهد که معادله $MR = MC$ در آن دو جواب دارد و یکی از آن ها کمینه سود است. **مواظب باشید:** از جواب های $MR = MC$ آن پذیرفته است که در آن **شیب هزینه نهایی** از شیب درآمد نهایی بیشتر باشد، یعنی $\pi'' < 0$. ص ۱۱۵

۶ کشش و درآمد

طراح تست می پرسد افزایش قیمت در تقاضای پرکشش با درآمد کل چه می کند. **مواظب باشید:** در تقاضای **پرکشش** افزایش قیمت درآمد کل را کم و در **کم کشش** زیاد می کند؛ درآمد در **کشش واحد** بیشینه است. ص ۱۱۶



پایان نمونه رایگان

بقیه اش در فایل کامل است

در این نمونه ۱۱ صفحه از ۲۷۶ صفحه را دیدید.

۳

آزمون جامع

۱۳

فصل درسنامه فشرده

۹۴۵

تست با پاسخ تشریحی

۲۷۶

صفحه

فایل کامل، فصل به فصل

فصل	عنوان	تست آخر فصل	از صفحه
بخش اول: ریاضیات پایه و حسابان			
۱	مجموعه ها و ضرب دکارتی	۵۷	۴
۲	مختصات، خط و مدل های خطی هزینه و درآمد	۶۰	۲۱
۳	رابطه و تابع	۸۸	۳۸
۴	حد و پیوستگی	۷۵	۶۳
۵	مشتق	۷۷	۸۶
۶	کاربردهای مشتق در مدیریت و اقتصاد	۸۱	۱۰۹
۷	انتگرال و کاربردهای آن	۸۰	۱۳۲
بخش دوم: جبر خطی			
۸	بردارها	۵۵	۱۵۴
۹	ماتریس و دترمینان	۷۵	۱۶۹
۱۰	دستگاه معادلات خطی و تبدیل خطی	۶۷	۱۹۰
بخش سوم: چندمتغیره، معادلات دیفرانسیل و ریاضیات مالی			
۱۱	توابع چندمتغیره	۷۰	۲۰۹
۱۲	معادلات دیفرانسیل	۴۵	۲۲۹
۱۳	ریاضیات مالی	۵۵	۲۴۲
جمع		۸۸۵	

✓ هر فصل: درسنامه فشرده با برچسب اولویت مطالعه، جدول و کادر فرمول، مثال حل شده با الگوی حل و برگه جمع بندی یک صفحه ای.

✓ زیر پاسخ هر تست نوشته شده مطلبش در کدام صفحه درسنامه است.

✓ ۳ آزمون جامع ۲۰ سؤالی با سؤال هایی که در تست فصل ها نیامده اند؛ ویرایش های بعدی برای خریداران رایگان است.

دانلود فایل کامل pdf از بژیک

دانلود جزوه و تست ریاضیات و کاربرد آن در مدیریت استخدامی ۱۴۰۵ با نمونه رایگان pdf

bzhik.ir

